मिडिल स्कूलों के लिए

गणित

पुस्तक II भाग I

कक्षा VII के लिए पाठ्य-पुस्तक

मनमोहन सिंह अरोरा
इन्दर बीर सिंह पासी

विद्ययाऽमृतमश्नुते

एन सी ई आर टी
NCERT

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

NATIONAL COUNCIL OF EDUCATIONAL RESEARCH AND TRAINING

प्रथम संस्करण
जून 1978
आषाढ़ 1900
पुनर्मुद्रण
मार्च 1980
चैत्र 1902
जून 1981
ज्येष्ठ 1903
मार्च 1983
चैत्र 1905

PD 12 T—SD

मुख पृष्ठ चित्र : सी० पी० टंडन
मुख पृष्ठ पर संस्कृत में लिखावट : हरि प्रकाश त्यागी

मूल्य रु० 4.80

प्रकाशन विभाग में विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान भवन, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा राजबन्धु इण्डस्ट्रियल कम्पनी, सी-61 मायापुरी, नई दिल्ली 110064 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला के अन्तर्गत दूसरी पुस्तक का भाग I है। हमें जो समालोचनाएँ प्राप्त हुई हैं उनसे प्रमाणित होता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 1977 में निर्मित पुस्तक 1 का उसके प्रयोग करने वालों ने बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया है। अतः प्रस्तुत पुस्तक का भी उसी आधार पर निर्माण किया गया है। इसमें जो गणित है वह न तो "आधुनिक" है और न ही "परम्परागत", बल्कि यह है हमारे देश की वर्तमान आवश्यकताओं के अनुरूप एक सरल, सुन्दर और सुरूप गणित। इस पुस्तक-माला में मूलभूत संकल्पनाओं के अपेक्षित ज्ञान के साथ ही अभिगणनात्मक पक्ष का भी जिसको कि तथाकथित "आधुनिक गणित" के काल में लगभग बाहर निकाल दिया गया था, पुनर्नवीकरण किया गया है। अतः इस पुस्तक में विद्यार्थी की अभिगणनात्मक क्षमता को इष्टतम स्तर तक उठाने के लिए बहुत से प्रश्नों के अतिरिक्त वास्तविक जीवन की स्थितियों और अन्य विषयों में गणित के अनुप्रयोगों को प्रचुर मात्रा में सम्मिलित किया है।

हमारे राष्ट्रीय लक्ष्यों, हमारे पर्यावरण और हमारे साधनों के अनुरूप कक्षा I (आयु 6+) से कक्षा XII (आयु 18+) तक के भारतीय विद्यार्थियों की आवश्यकताओं के अनुकूल गणित की इस पुस्तक-माला को विकसित करने में परिषद् डा० मनमोहन सिंह अरोरा की कल्पना-दृष्टि की बहुत प्रशंसा करती है। इस कल्पना-दृष्टि ने एक ओर तो गणित के शिक्षकों और विशेषज्ञों का अनुमोदन प्राप्त किया तथा दूसरी ओर व्यापक रूप से पूरे शैक्षिक-समुदाय का भी समर्थन प्राप्त किया।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित के प्रोफेसर, प्रो० आई० बी० एस० पासी ने प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के सहयोग से तैयार किया। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री जी० डी० ढल और डा० राम अवतार ने आवश्यक सहायता प्रदान की। इस प्रारूप का प्रो० एस० डी० चोपड़ा, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) और परिषद् के डा० एस० के० सिंह गौतम के साथ विवेचन किया गया। विचार विमर्श से जो विचार सामने आए

प्रथम संस्करण
जून 1978
आषाढ़ 1900
पुनर्मुद्रण
मार्च 1980
चैत्र 1902
जून 1981
ज्येष्ठ 1903
मार्च 1983
चैत्र 1905

PD 12 T—BD

मुख पृष्ठ चित्र डी० डी० टंडन
मुख पृष्ठ पर अक्षरण के चित्रकार हरि प्रकाश त्यागी

मूल्य रु० 4.80

प्रकाशन विभाग में विनोद कुमार पंडित, सचिव, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान भवन, श्री अरविन्द मार्ग, नई दिल्ली 110016 द्वारा प्रकाशित तथा राजबन्धु इण्डस्ट्रियल कम्पनी, बी-61 मायापुरी, नई दिल्ली 110064 द्वारा मुद्रित।

प्राक्कथन

यह पुस्तक "मिडिल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला के अन्तर्गत दूसरी पुस्तक का भाग I है। हमें जो समालोचनाएँ प्राप्त हुई हैं उनसे प्रमाणित होता है कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 1977 में निर्मित पुस्तक 1 का उसके प्रयोग करने वालों ने बहुत अच्छी प्रकार से स्वागत किया है। अत: प्रस्तुत पुस्तक का भी उसी आधार पर निर्माण किया गया है। इसमें जो गणित है वह न तो "आधुनिक" है और न ही "परम्परागत", बल्कि यह है हमारे देश की वर्तमान आवश्यकताओं के अनुरूप एक सरल, सुन्दर और सुरूप गणित। इस पुस्तक-माला में मूलभूत संकल्पनाओं के अपेक्षित ज्ञान के साथ ही अभिगणनात्मक पक्ष का भी जिसको कि तथाकथित "आधुनिक गणित" के काल में लगभग बाहर निकाल दिया गया था, पुनर्नवीकरण किया गया है। अत: इस पुस्तक में विद्यार्थी की अभिगणनात्मक क्षमता को इष्टतम स्तर तक उठाने के लिए बहुत से प्रश्नों के अतिरिक्त वास्तविक जीवन की स्थितियों और अन्य विषयों में गणित के अनुप्रयोगों को प्रचुर मात्रा में सम्मिलित किया है।

हमारे राष्ट्रीय लक्ष्यों, हमारे पर्यावरण और हमारे साधनों के अनुरूप कक्षा I (आयु 6+) से कक्षा XII (आयु 18+) तक के भारतीय विद्यार्थियों की आवश्यकताओं के अनुकूल गणित की इस पुस्तक-माला को विकसित करने में परिषद् डा० मनमोहन सिंह अरोरा की कल्पना-दृष्टि की बहुत प्रशंसा करती है। इस कल्पना-दृष्टि ने एक ओर तो गणित के शिक्षकों और विशेषज्ञों का अनुमोदन प्राप्त किया तथा दूसरी ओर व्यापक रूप से पूरे शैक्षिक समुदाय का भी समर्थन प्राप्त किया।

इस पुस्तक का प्रथम प्रारूप कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित के प्रोफेसर, प्रो० आई० बी० एस० पासी ने प्रो० मनमोहन सिंह अरोरा के सहयोग से तैयार किया। परिषद् के विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के श्री जी० डी० दल और डा० राम अवतार ने आवश्यक सहायता प्रदान की। इस प्रारूप का प्रो० एस० डी० चोपड़ा, कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय के गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष (अवकाश प्राप्त) और परिषद् के डा० एस० के० सिंह गौतम के साथ विवेचन किया गया। विचार विमर्श से जो विचार सामने आए

[illegible] प्रो० मनमोहन सिंह अरोड़ा ने सम्पादित किया। डा० आर० पी० गुप्ता और डा० एस० के० सिंह गौतम ने इस कार्य में उनकी सहायता की। पुस्तक-प्रारूप को इस रूप में तैयार करने में, मैं इनमें से प्रत्येक का, उनके अथक परिश्रम के लिए हार्दिक आभार प्रकट करता हूँ।

परिषद् ने सदैव यह प्रयत्न किया है कि अपने पाठ्यक्रम विकास कार्य में राज्यस्तरीय शिक्षकों, राज्य शिक्षा संस्थानों एवं राज्य विज्ञान शिक्षा संस्थानों के प्रतिनिधियों को सम्बद्ध किया जाए ताकि शिक्षकों और विद्यार्थियों के हाथ में यथासम्भव अच्छी से अच्छी सामग्री दी जा सके। अत: इस पुस्तक के द्वितीय प्रारूप को फरवरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान में आयोजित बैठकों में शिक्षकों, शिक्षक प्रशिक्षकों और विषय-विशेषज्ञों के एक दल को दिखाया गया।

अंतिम लेखन और विषय-सम्पादन का कार्य पुन: प्रो० मनमोहन सिंह अरोड़ा ने सम्भाला। डा० आर० पी० गुप्ता और डा० एस० के० सिंह गौतम ने उनकी सहायता की। डा० एस० के० सिंह गौतम और श्री ईश्वर चन्द्र ने प्रश्नों के उत्तर तैयार किए। हिन्दी संस्करण का विषय-सम्पादन श्री महेन्द्र शंकर ने डा० के० सी० सहाय और श्री ईश्वर चन्द्र की सहायता से किया। मैं इनमें से प्रत्येक का कृतज्ञ हूँ, विशेष रूप से प्रो० मनमोहन सिंह अरोड़ा का जिन्होंने प्रसन्नतापूर्वक इस कार्य को अपने हाथ में लिया और अपनी अत्यधिक व्यस्तता के होते हुए भी इतने कम समय में इसे पूरा किया।

निस्सन्देह, किसी भी पुस्तक की उपयोगिता का अंतिम निर्णायक तो उसका प्रयोग करने वाले अर्थात् विद्यार्थियों और शिक्षकों का समुदाय है। परिषद् उनके विचारों का कृतज्ञतापूर्वक स्वागत करेगी ताकि पुस्तक के अगले संस्करण में संशोधन और अधिक सुधार किया जा सके।

शिब कुमार मित्र
निदेशक
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्

प्रस्तावना

कक्षा VII के लिए "मिडल स्कूलों के लिए गणित" पुस्तक-माला की दूसरी पुस्तक के भाग I को पाठकों के हाथों सौंपते हुए मुझे प्रसन्नता हो रही है । इसमें जो कुछ दिया है वह सामान्यतया बीजगणित विषय शीर्षक के अंतर्गत पढ़ाया जाता है । यह वांछनीय है कि शिक्षक ज्यामिती, व्यावसायिक गणित और सांख्यिकी पर आने से पहले, जो कि दूसरी पुस्तक के भाग II की विषय-सामग्री हैं, भाग I पढ़ायें ।

लगभग पिछले दस वर्षों से, जब से कि हमारे देश में तथा कथित "आधुनिक" गणित का सूत्रपात हुआ, विद्यमान परिस्थितियों में उसकी उपयोगिता और विद्यार्थियों में उसके प्रति अभिरुचि के बारे में चिन्ता बढ़ती जा रही है । सामग्री को पढ़ाने में शिक्षकों को कठिनाइयों का सामना करना पड़ा, विद्यार्थियों को संकल्पनाएँ समझने में कठिनाई हुई तथा अभिभावकों ने, इच्छा होते हुए भी, गणित के अध्ययन में अपने बच्चों की सहायता करने में अपने को असमर्थ पाया ।

अत: राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् को गणित के पाठ्य-क्रम में विस्तृत संशोधन करने का कार्य अपने हाथ में लेना पड़ा । इस कार्य में जो केवल एक मार्ग दर्शक उद्देश्य था वह यह था कि हम बच्चे को किसी स्तर पर जो गणित पढ़ाते हैं उसे न केवल सरलता से उसके समझने योग्य होना चाहिए बल्कि उसको उसके वातावरण से भी यथा सम्भव सम्बन्धित होना चाहिए । इसके साथ ही, हमारे विकास के लक्ष्यों और हमारे उपलब्ध साधनों के परिप्रेक्ष्य में इसे हमारे समाज की आवश्यकताओं के अनुकूल भी होना चाहिए ।

इस पुस्तक की कुछ विशेषताएँ, जो कि पुस्तक-माला की पहली पुस्तक में भी थी, नीचे दी जा रही हैं :

(i) किसी संकल्पना को प्रविष्ट करने से पहले बच्चे को अभिप्रेरित करने के लिए उपयुक्त उदाहरण दिए गए हैं ;

(ii) भाषा सरल और रोचक है । 12+ से 13+ की आयु के बच्चे की शब्दावली को ध्यान में रखा गया है ;

(iii) समुचित हल किए हुए प्रश्नों को पर्याप्त मात्रा में दिया गया है ताकि विद्यार्थी संकल्पना के अनुप्रयोग से अभिज्ञ हो सकें ।

(iv) जहाँ तक हो सका है, अनावश्यक आधुनिक शब्दावली और लिपिचिह्नों को छोड़ दिया गया है ;

(v) पुस्तक को पाँच एककों में विभाजित किया गया है । प्रत्येक एकक के प्रारम्भ में यह बताया गया है कि इस एकक में क्या है तथा प्रत्येक एकक के अंत में मुख्य संकल्पनाओं की एक सूची दी गई है ताकि विद्यार्थी यह तुरन्त स्मरण कर सके कि एक विशेष एकक में उसने क्या पढ़ा है ।

(vi) प्रत्येक एकक में जो प्रश्नावलियाँ दी गई हैं वे इस अभिप्राय से दी गई हैं कि शिक्षकों को तुरन्त सम्बद्ध प्रश्नों का एक बैंक प्राप्त हो जाए ताकि वे विभिन्न योग्यता-स्तर के विद्यार्थियों की आवश्यकताओं को भली भाँति पूर्ण कर सकें ।

(vii) उपयुक्त स्थानों पर विविध प्रश्नावलियों को सम्मिलित किया गया है ताकि विद्यार्थी सामग्री का आकस्मिक पुनरावलोकन कर सकें ।

(viii) कठिन प्रश्न और अनुच्छेद तारांकित किये गए हैं ।

(ix) विभिन्न स्थानों पर "क्यों ?" लगा दिया गया है ताकि विद्यार्थी को अपने विचार सुस्पष्ट बनाने में सहायता मिल सके । अतः शिक्षक से यह आशा की जाती है कि वह स्वयं इनके उत्तर देने के बदले विद्यार्थी को इनके उत्तर देने के लिए प्रेरित करें ।

(x) विविध प्रश्नावलियों के सिवाय प्रत्येक प्रश्नावली में प्रश्न सरलता से कठिनता के क्रम में दिए गए हैं ।

विद्यार्थियों के लिए दो शब्द

आप गणित की इस पुस्तक को पढ़ने जा रहे हैं । यदि आप प्रारम्भ में ही सीखने की कुछ 'अच्छी' आदतें डाल लें तो आप गणित के अध्ययन को आकर्षक और अधिक सार्थक पाएँगे । सीखने की कुछ 'अच्छी' आदतें नीचे सुझाई गई हैं :

1. गणित केवल कार्य करने से सीखा जाता है । केवल अपनी पाठ्य पुस्तक को ही न पढ़ें । आपको अपने पास सदैव एक पेंसिल और कागज रखना चाहिए और पुस्तक के अनुसार 'कार्य' करना चाहिए ।

2. पुस्तक में जहाँ आपको "क्यों ?" मिले, आपको उसका उत्तर प्रदान करने का प्रयत्न करना चाहिए।

3. किसी विशेष प्रश्न पर अधिक समय कभी न लगाएं। अच्छा तो यह है कि आप अगले प्रश्न पर चले जाएं तथा कुछ समय बाद ताज़े दिमाग से उस पुराने प्रश्न पर वापिस आएं जो आपको कठिन लग रहा था।

4. मनुष्य के मस्तिष्क रूपी भंडार में केवल सीमित सूचनाएं ही रखने की क्षमता है। जिसका प्रायः प्रयोग नहीं होता उसे भंडार से निकाल दिया जाता है। इसलिए यह अच्छा होगा कि आप प्रत्येक एकक में मूलभूत परिणामों का एक सारांश बना लें तथा समय समय पर इनका पुनरावलोकन करें।

मैं और प्रो॰ इन्दर बीर सिंह पासी दोनों ही कुरुक्षेत्र विश्वविद्यालय में गणित विभाग के वरिष्ठ प्रोफेसर और अध्यक्ष प्रो॰ एस॰ डी॰ चोपड़ा (अवकाश प्राप्त) के, उनके द्वारा पुस्तक के विभिन्न स्थानों पर दिए गए बहुमूल्य सुझावों के लिए, आभारी हैं। परिषद् में विज्ञान एवं गणित शिक्षा विभाग के मेरे साथियों ने प्रत्येक स्तर पर मुझे अपना अपरिमित सहयोग दिया। मैं इनमें से प्रत्येक का और सबका बहुत कृतज्ञ हूँ। विशेष रूप से डा॰ आर पी॰ गुप्ता और डा॰ एस॰ के॰ सिंह गौतम द्वारा मुझे पांडुलिपि के संपादन में दी गई सहायता, डा॰ एस॰ के॰ सिंह गौतम और श्री ईश्वर चन्द्र द्वारा प्रश्नों के दिए गए उत्तर तथा श्री महेन्द्र शंकर द्वारा डा॰ के॰ सी॰ मदान और श्री ईश्वर चन्द्र की सहायता से हिन्दी संस्करण के किए गए संपादन का उल्लेख किया जा सकता है। मैं उन शिक्षकों का भी बहुत आभारी हूँ जिन्होंने इस पुस्तक की सामग्री की समीक्षा करने में अपना समय दिया और इसमें सुधार हेतु बहुमूल्य सुझाव दिए। हो सकता है कि हमारे भरसक प्रयत्नों के बावजूद कुछ अनचाही त्रुटियाँ रह गई हों। इनमें से कोई भी त्रुटि बताए जाने पर परिषद् प्रसन्नता पूर्वक उन्हें स्वीकार करेगी और साथ ही इस पुस्तक के अगले संस्करणों में सुधार हेतु किन्हीं भी सुझावों का परिषद् स्वागत करेगी।

मई 1978 मनमोहन सिंह अरोरा

कृतज्ञताज्ञापन

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् निम्नलिखित व्यक्तियों की आभारी है जिन्होंने फरवरी और मार्च 1978 में राष्ट्रीय शिक्षा संस्थान, नई दिल्ली में आयोजित बैठकों में इस पाठ्य पुस्तक की मूल सामग्री की समीक्षा की

1. डा० मनमोहन सिंह अरोरा
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
2. डा० राम अवतार
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
3. श्री बी० आर० बब्बर
   127/1 डा० मुकर्जी नगर दिल्ली
4. श्रीमती प्रवीण खन्ना
   केन्द्रीय विद्यालय, ईस्ट गार्डन, नई दिल्ली
5. श्री ईश्वर चन्द्र
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
6. श्री भगवान दास
   शिक्षा अधिकारी, क्षेत्र XI, राजेन्द्र नगर, नई दिल्ली
7. श्री जी० डी० दत्त
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली
8. डा० एस० के० सिंह गौतम
   राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

9. श्री पी० एन० गोयल
दिल्ली पब्लिक स्कूल, मथुरा रोड, नई दिल्ली

10. श्री एम० सी० गुप्ता
डी० ए० वी० उच्चतर माध्यमिक विद्यालय, चित्रगुप्त रोड, नई दिल्ली

11. डा० आर० पी० गुप्ता
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद, नई दिल्ली

12. कु० के० एम० जैन
एम० डी० जैन उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, दिल्ली

13. श्री जे० पी० कलसन
एयर फोर्स सेन्ट्रल स्कूल, सुबरोतो पार्क, नई दिल्ली

14. डा० (श्रीमती) अरुणा कपूर
जामिया मिलिया इस्लामिया, नई दिल्ली

15. श्री आर० एस० कोठारी
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

16. डा० रवीन्द्र कुमार
रामजस कालेज, दिल्ली

17. डा० के० सी० मदान
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

18. श्रीमती कंचन मानकतला
गार्गी कालेज, नई दिल्ली

19. कु० ज० मसुखानी
लेडी इरविन हायर सैकेन्डरी स्कूल, नई दिल्ली

20. कु० शारदा भलाई

इन्द्रप्रस्थ महिला कालेज, नई दिल्ली

21. कु० उमा मेहता

दिल्ली पब्लिक स्कूल, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

22. श्रीमती मनोज महेन्द्र

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालिका विद्यालय, मालवीय नगर, नई दिल्ली

23. श्री उमेश नारायण

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सैक्टर V, II शिफ्ट, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

24. डा० आत्मा राम शाह

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

25. कु० कमला साहनी

ब्रिटिश स्कूल, चाणक्यपुरी, नई दिल्ली

26. श्री आ० एम० शाकिर

शिक्षा निदेशालय, दिल्ली

27. श्री महेन्द्र शंकर

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली

28. श्री आई० डी० शर्मा

केन्द्रीय विद्यालय, आई० आई० टी० कैम्पस, नई दिल्ली

29. श्रीमती सरोज शर्मा

स्प्रिंगडेल्स स्कूल, पूसा रोड, नई दिल्ली

30. श्री बलबीर सिंह

राजपूताना रायफल्स हीरोज़ मैमोरियल हायर सैकेन्डरी स्कूल, दिल्ली कैन्ट

31. श्री बलदेव सिंह

राज्य शिक्षा संस्थान, दिल्ली

32. श्री सज्जन सिंह

राजकीय उच्चतर माध्यमिक बालक विद्यालय, सैक्टर VII, आर० के० पुरम, नई दिल्ली

33. श्रीमती सुषमा सूद

केन्द्रीय विद्यालय, एण्ड्रूज गंज, नई दिल्ली

34. श्री यश पाल वर्मा

नवयुग स्कूल, सरोजिनी नगर, नई दिल्ली

पुस्तक में प्रयुक्त गणित के संकेत

योग

व्यवकलन

गुणन

विभाजन

के समान है

से छोटा है

से बड़ा है

से छोटा है या के समान है

से बड़ा है या के समान है

निरपेक्ष मान

विषय-सूची

एकक 1

परिमेय संख्याएँ

आप धनपूर्णांकों, पूर्ण संख्याओं एवं पूर्णांकों से पहले से ही परिचित हैं। आप जानते हैं कि इनको किस प्रकार जोड़ा, घटाया, गुणा तथा भाग किया जाता है। इस एकक में हम नई संख्याओं अर्थात् परिमेय संख्याओं (rational numbers) की 'खोज' की आवश्यकता पर प्रकाश डालेंगे तथा सीखेंगे कि इनको संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

1.1 भूमिका

एक परिवार में 4 सदस्य—पिता, माता, एक पुत्र तथा एक पुत्री हैं। एक शाम को पिता 1 दर्जन (अर्थात् 12) संतरे लेकर घर आता है। वह ईमानदारी के साथ, स्वयं को भी सम्मिलित करते हुए, प्रत्येक को बराबर-बराबर संतरे देना चाहता है। प्रत्येक सदस्य को कितने संतरे मिलेंगे ? निस्संदेह प्रत्येक को 3 संतरे मिलेंगे।

एक दूसरी शाम को पिता को कार्यालय से लौटने में देर हो जाती है। फल-विक्रेता के पास 9 संतरे थे और इन्हें पिता घर ले आता है। वह पुनः ईमानदारी के साथ, स्वयं को भी सम्मिलित करते हुए, प्रत्येक को बराबर-बराबर संतरे देना चाहता है। प्रत्येक सदस्य को कितने संतरे मिलेंगे ?

आइए, एक अन्य स्थिति पर विचार करें। एक स्कूल में एक वाद-विवाद प्रतियोगिता आयोजित की गई है और उसमें 5 वक्ता भाग ले रहे हैं। इस कार्य के लिए केवल एक घंटे का समय उपलब्ध है। यदि प्रत्येक वक्ता को समान समय दिया जाए तो प्रत्येक वक्ता को कितने घंटे मिलेंगे ?

अन्त में हम एक और स्थिति पर विचार करते हैं। एक गाँव में, गाँव को मुख्य सड़क से मिलाने वाली, 1 किलोमीटर लम्बी एक सड़क का निर्माण किया जाना है। ठेकेदार को केवल 30 दिन का समय दिया गया है। वह इस कार्य को 30 दिन में इस प्रकार करने की सोचता है कि प्रत्येक दिन समान कार्य हो। प्रत्येक दिन उसे कितनी सड़क का निर्माण करना चाहिए ?

हमें ज्ञात होता है कि अभी तक जिन संख्याओं का हमें ज्ञान है उनसे इन प्रश्नों के उत्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करते हुए हम संकट में पड़ गए हैं। ये संख्याएँ इन स्थितियों के उत्तर देने के लिए 'पर्याप्त' नहीं हैं। हम 9 संतरों को 4 व्यक्तियों में बराबर-बराबर नहीं बाँट सकते। हम 1 घंटे का 5 वक्ताओं में समान रूप से वितरण* नहीं कर सकते। साथ ही, हम 1 किलोमीटर को 30 दिन में समान रूप से विभाजित नहीं कर सकते।

1.2 परिमेय संख्याओं की आवश्यकता

आइए, थोड़ी भिन्न दृष्टि से उपर्युक्त स्थितियों पर विचार करें। हम देखते हैं कि पूर्णांकों में हम 9 ÷ 4, 1 ÷ 5, 1 ÷ 30 का निर्धारण नहीं कर सकते। अतः ऐसी स्थितियों के उत्तर ज्ञात करने में समर्थ होने के लिए हमें नई संख्याएँ 'खोजने' की आवश्यकता है। आइए ऐसा करें।

संतरों के उदाहरण में यह स्पष्ट है कि प्रत्येक सदस्य को 2 संतरे मिलेंगे और 1 संतरा शेष बच रहेगा। फिर इस 1 संतरे को चार बराबर भागों में काटा जाना चाहिए जिससे कि प्रत्येक सदस्य को इनमें से एक-एक भाग मिले। इस प्रकार परिवार के प्रत्येक सदस्य को दो पूरे संतरे तथा एक संतरे का

*घंटों के पदों में वितरण।

एक-चौथाई मिलता है। हम इसे यह कहकर व्यक्त करते हैं कि प्रत्येक सदस्य को $\frac{9}{4}$ (जिसे 'नौ-बटे-चार' या 'नौ-चौथाई' पढ़ा जाता है) संतरे मिलते हैं।

इसी प्रकार हमें प्रत्येक वक्ता को एक घंटे का पाँचवा भाग (पाँचांश) देना चाहिए। हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि प्रत्येक वक्ता को $\frac{1}{5}$ घंटे मिलते हैं। अंत में, ठेकेदार को प्रत्येक दिन सड़क के तीसवें भाग का निर्माण करना चाहिए। हम इसे यह कह कर व्यक्त करते हैं कि ठेकेदार प्रत्येक दिन $\frac{1}{30}$ किलोमीटर लम्बी सड़क का निर्माण करता है।

$\frac{9}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{30}$ उन 'नई' संख्याओं के उदाहरण हैं जो परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। परिमेय संख्याओं को भिन्न* (fractions) भी कहा जाता है।

एक परिमेय संख्या वह संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सके, जहाँ p और q पूर्णांक हों तथा q शून्य नहीं हो।

टिप्पणी 1 : हमने यह प्रतिबन्ध लगाया है कि q शून्य के बराबर नहीं हो। (क्यों ?) गणित की भाषा में हम इसे $q \neq 0$ लिख कर व्यक्त करते हैं।

टिप्पणी 2 : आइए परिभाषा का अध्ययन करें। हमने कहा है कि 'वह संख्या जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में *रखा* जा सके,...'। इस परिभाषा में शब्द *रखा* मुख्य शब्द है। ध्यान दीजिए कि हमने यह नहीं कहा है कि '$\frac{p}{q}$ के प्रकार की

* वास्तव में परिमेय संख्याएँ, परिमेय भिन्न कहलाती हैं। शब्द 'भिन्न', स्वयं में ही, बहुत व्यापक है और इसमें परिमेय भिन्न सम्मिलित होती हैं। परन्तु इस पुस्तक में, हम परिमेय संख्याओं को भिन्न ही कहते रहेंगे।

साधारणतया इस प्रकार शब्द 'रखा लिखना' का अर्थ निम्न में स्पष्ट हो जाता है:

उदाहरणार्थ, पूर्णांकों −3, −2, 0, 1, 4 इत्यादि को लीजिए। इनको क्रमशः $\frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}$, इत्यादि लिखा जा सकता है। अर्थात् इनमें से प्रत्येक को $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सकता है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि **प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।**

टिप्पणी 3 यदि हम कोई शब्दकोश (dictionary) देखें तो हमें ज्ञात होगा कि अंग्रेजी के शब्द **'rational'** (परिमेय) की उत्पत्ति **'ratio'** (अनुपात) से हुई है और अनुपात की संकल्पना से हम पहले से ही परिचित हैं।

परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ में p अंश **(numerator)** तथा q हर **(denominator)** कहलाता है।

प्राचीन काल के मनुष्यों को परिमेय संख्याओं (जिन्हें वे भिन्न कहा करते थे) की आवश्यकता गणन संख्याओं तथा पूर्णांकों की आवश्यकता के काफी समय बाद प्रतीत हुई। प्रारंभ रूप में, भिन्न की प्रथम कल्पना का विकास लम्बाइयों, भारों, इत्यादि के मापने की प्रक्रियाओं के साथ हुआ। उदाहरणार्थ, बेबीलोन के निवासियों ने **सेक्साजेसीमल (sexagesimal)** भिन्नों (हर 60 वाली भिन्नों) का विस्तृत रूप में प्रयोग किया चूंकि उनकी मापें और धन-राशि 60 भागों के पदों में विभाजित किए गए थे। ऐसा प्रतीत होता है कि मिस्रवासियों के पास एकक भिन्नों (अंश 1 वाली भिन्नों) जैसे कि $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$, इत्यादि के लिए संकेत थे। वे संख्या के ऊपर संकेत लिखकर भिन्नों को निरूपित किया करते थे। इस प्रकार , $\frac{1}{3}$ को निरूपित करेगा, , $\frac{1}{10}$ को निरूपित करेगा, , $\frac{1}{12}$ को निरूपित करेगा, इत्यादि। केवल एक अन्य भिन्न जिसके लिए वे संकेत रखते थे, $\frac{2}{3}$ थी। फिर भी वे अन्य बहुत सी भिन्नों से परिचित थे। उदाहरणार्थ, रींड

पॅपीरस (Rhind Papyrus) में हमें इस बात का प्रमाण मिलता है कि लगभग 1700 ई० पू० में मिस्रवासी ऐसी भिन्नों का प्रयोग करते थे जिन्हें आजकल हम $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{2}{9}$, इत्यादि लिखते हैं। यूनानी लोगों को भी भिन्नों के बारे में ज्ञान था। वे हर को अंश के ऊपर लिखा करते थे तथा इसके अतिरिक्त उन्होंने भिन्नों के लिए अन्य संकेतों का भी प्रयोग किया। रोम के निवासियों ने द्वादश आधार वाली भिन्नों (**duodecimal fractions**) अर्थात् ऐसी भिन्नों का प्रयोग किया जिनका हर 12 था, चूँकि उनके भार (weight) और धन-राशि को 12 भागों के पदों में विभाजित किया गया था। प्राचीन हिन्दू गणितज्ञों ने भी भिन्नों का प्रयोग किया, यद्यपि उन्होंने अपने संकेतों में भिन्न वाली रेखा का प्रयोग नहीं किया। उदाहरणार्थ, ब्रह्मगुप्त (जन्म 598 ई०) ने भिन्नों के साथ संक्रियाओं के लिए नियम प्रदान किये। ये नियम लगभग वैसे ही हैं जैसे कि आजकल हम प्रयोग करते हैं। नौवीं शताब्दी में भिन्नों और उनके साथ संक्रियाओं के नियम भारत से अरब देशों में फैले। ऐसा विश्वास किया जाता है कि एक भारतीय विद्वान ब्रह्मगुप्त के ब्रह्मस्फुट सिद्धांत को लेकर अरब देश में पहुँचा। इसका प्रसिद्ध अरब गणितज्ञ अलख्वारिज़्मी ने अरबी भाषा में अनुवाद किया। तदुपरान्त हिन्दुओं द्वारा किया गया यह कार्य अरब देशों से इटली तथा पश्चिमी देशों में फैला।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : निम्न परिमेय संख्याओं को लिखने के लिए संख्यांकों (numerals) का प्रयोग कीजिए :

(*i*) दो-सातांश (sevenths) (*ii*) एक-शतांश (hundredth) (*iii*) सत्रह-पच्चीसांश (twentyfifths)

हल : हम संख्याओं को इस प्रकार लिखते हैं :

(*i*) $\frac{2}{7}$ (*ii*) $\frac{1}{100}$ (*iii*) $\frac{17}{25}$

उदाहरण 2 : निम्न में से प्रत्येक को शब्दों में लिखिए :

(*i*) $\frac{7}{8}$ (*ii*) $\frac{19}{5}$ (*iii*) $\frac{5}{11}$

हल : ... इस प्रकार हैं

(i) सात-आठांश (ii) उन्नीस-पांचांश (iii) पाँच-ग्यारहांश

उदाहरण 3 : $\frac{237}{562}$ के अंश और हर का अन्तर ज्ञात कीजिए।

हल : अंश 237 है तथा हर 562 है।

अत: वांछित अन्तर 237 − 562 अर्थात् −325 है।

उदाहरण 4 : वह परिमेय संख्या लिखिए जिसका हर 3 अंकों का सबसे बड़ा धनपूर्णांक है तथा अंश 2 अंकों का सबसे छोटा धनपूर्णांक है।

हल : 3 अंकों का सबसे बड़ा धनपूर्णांक 999 है। इस प्रकार हर 999 है। 2 अंकों का सबसे छोटा धनपूर्णांक 10 है। इस प्रकार अंश 10 है।

अत: वांछित परिमेय संख्या $\frac{10}{999}$ है।

प्रश्नावली 1.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं को लिखने के लिए संख्यांकों का प्रयोग कीजिए :
   (i) एक-चौथाई
   (ii) तीन-पांचांश
   (iii) चार-सातांश
   (iv) दो-नवांश
   (v) ग्यारह-सोलहांश

2. निम्न को शब्दों में लिखिए :

   (i) $\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{9}{10}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $\frac{16}{17}$

3. (i) एक मिनट, एक घंटे का कौन सा भाग है ?
   (ii) एक मीटर, एक किलोमीटर का कौन सा भाग है ?

(*iii*) एक मिलीग्राम, एक ग्राम का कौन सा भाग है ?

(*iv*) एक पाँच पैसे का सिक्का, एक रुपये का कौन सा भाग है ?

(*v*) एक सेंटीमीटर, एक मीटर का कौन सा भाग है ?

4. निम्न परिमेय संख्याओं के अंश और हर लिखिए :

(*i*) $\frac{2}{3}$ (*ii*) $\frac{101}{10}$ (*iii*) $\frac{56}{87}$

(*iv*) $\frac{-5}{7}$ (*v*) 8

5. परिमेय संख्या $\frac{1075}{803}$ के अंश तथा हर का अंतर ज्ञात कीजिए।

6. वह परिमेय संख्या लिखिए जिसका अंश चार अंकों की सबसे बड़ी पूर्ण संख्या है तथा जिसका हर तीन अंकों का सबसे छोटा धनपूर्णांक है।

7. एक स्कूल की सातवीं कक्षा में 40 विद्यार्थी हैं। यह कक्षा बाढ़ पीड़ित कोष में 100 रु० देने का निर्णय करती है। प्रत्येक विद्यार्थी को कितनी धनराशि देनी चाहिए ?

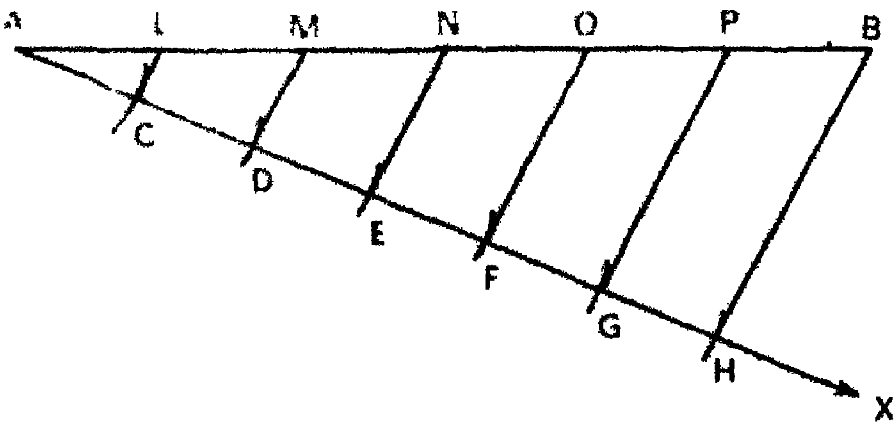
8. एक फर्म के चार बराबर के साझीदार हैं। एक वर्ष उस फर्म को 10050 रु० का लाभ होता है। प्रत्येक साझीदार को कितना लाभ होगा ?

9. एक स्टेडियम में एक दौड़ के मार्ग (race-track) की माप 400 मीटर है। 5000 मीटर की एक दौड़ के लिए खिलाड़ी को उसके कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे ?

1.3 एक रेखाखंड को दी हुई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजित करना

अब हम एक महत्वपूर्ण रचना के विषय में अध्ययन करते हैं। यह रचना है कि एक रेखाखंड को दी हुई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजित करना। हमें परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करने में इस रचना की आवश्यकता पड़ेगी।

मान लीजिए हमें एक रेखाखंड AB दिया हुआ है जिसकी लम्बाई,



आकृति 1.1 एक रेखाखंड का दी गई संख्या के समान रेखाखंडों में विभाजन

उदाहरणार्थ, 10 सें० मी० है। यह भी मान लीजिए कि इसे हमें, उदाहरणार्थ, 6 समान रेखाखंडों में विभाजित करना है।

हम यह रचना निम्न चरणों में करते हैं :

चरण 1 : हम $AB = 10$ सें० मी० खींचते हैं और एक कोण BAX की रचना इस प्रकार करते हैं कि $\angle BAX$ न्यूनकोण* हो।

चरण 2 : परकार की सहायता से हम AX पर छः बिन्दु C, D, E, F, G तथा H इस प्रकार अंकित करते हैं कि $AC = CD = DE = EF = FG = GH$ हो।

चरण 3 : हम B और H को मिलाते हैं।

* यह आवश्यक नहीं है कि $\angle BAX$ न्यूनकोण ही हो। परन्तु यदि यह न्यूनकोण हो तो यह रचना करने में अधिक सुविधाजनक रहता है।

चरण 4 : G से होकर हम HB के समांतर एक रेखा GP खींचते हैं। इसी प्रकार F से होकर हम $FO \parallel HB$ खींचते हैं और इसी प्रकार अन्य बिन्दुओं से भी रेखाएँ खींचते हैं जैसाकि आकृति 1.1 में दिखाया गया है।

यह सिद्ध किया जा सकता है कि रेखाखंड AB छः समान रेखाखंडों AL, LM, MN, NO, OP तथा PB में विभाजित हो गया है। परन्तु इसकी उपपत्ति हमारी चर्चा की सीमा के बाहर है। आप इसकी उपपत्ति का अगली कक्षाओं में अध्ययन करेंगे।

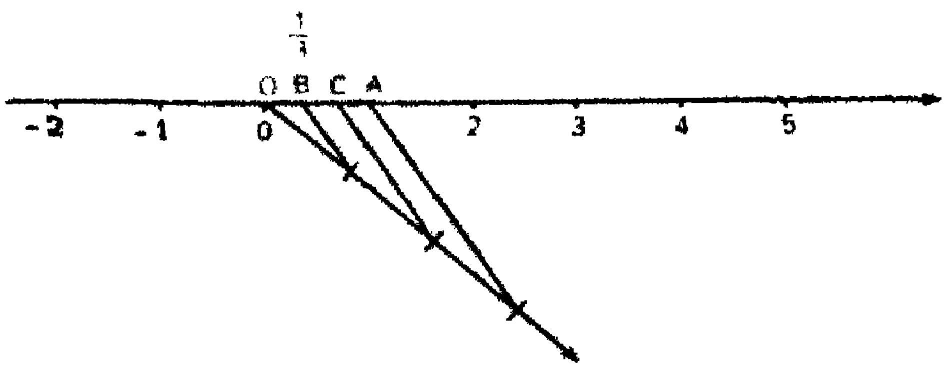
प्रश्नावली 1.2

1. एक 8 सें०मी० लम्बाई का रेखाखंड खींचिए। इसको 5 समान रेखाखंडों में विभाजित करने के लिए अनुच्छेद 1.3 की विधि का प्रयोग कीजिए। मापन से जाँच कीजिए कि प्रत्येक रेखाखंड 1.6 सें० मी० लम्बाई का है।
2. एक 11 सें० मी० लम्बाई के रेखाखंड को 4 समान रेखाखंडों में विभाजित कीजिए।
3. एक 6 सें० मी० लम्बाई के रेखाखंड को 8 समान रेखाखंडों में विभाजित कीजिए।

1.4 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्ण संख्याओं और पूर्णांकों को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखा था। अब हम यह देखेंगे कि परिमेय संख्याओं को ज्यामितीय रूप से किस प्रकार निरूपित किया जाता है।

उदाहरणार्थ, संख्या $\frac{1}{3}$ पर विचार कीजिए। संख्या को पढ़ने से ही कुछ

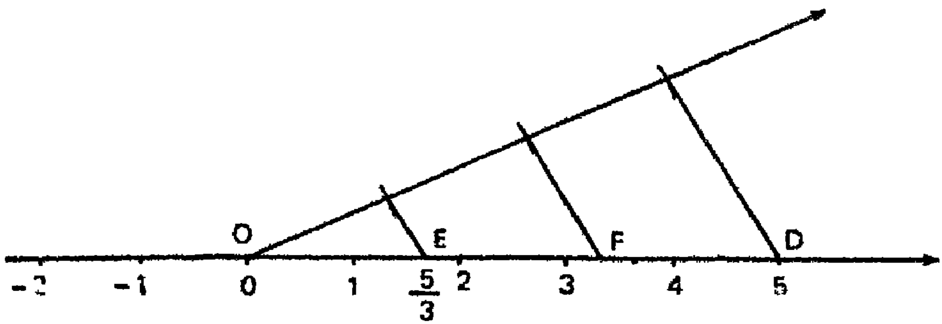


आकृति 1.2 : $\frac{1}{3}$ का निरूपण

संकेत प्राप्त होता है। याद कीजिए कि हम $\frac{1}{3}$ को 'एक-तिहाई' अर्थात् 1 का तीसरा भाग पढ़ते हैं। अतः हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA लेते हैं और OA को तीन समान रेखाखंडों OB, BC तथा CA में विभाजित करते हैं जैसा कि आकृति 1.2 में दिखाया गया है। तब, बिंदु B परिमेय संख्या $\frac{1}{3}$ को निरूपित करता है।

अब मान लीजिए कि हम संख्या $\frac{5}{3}$ को निरूपित करना चाहते हैं। पुनः संख्या को पढ़ने से ही कुछ संकेत प्राप्त हो जाता है। हम इस संख्या को 'पाँच-तिहाई' पढ़ते हैं। अतः हम 0 से 5 तक की दूरी (अंतराल) OD लेते हैं। [ध्यान दीजिए कि बिंदु D, संख्या 5 को निरूपित करता है।]

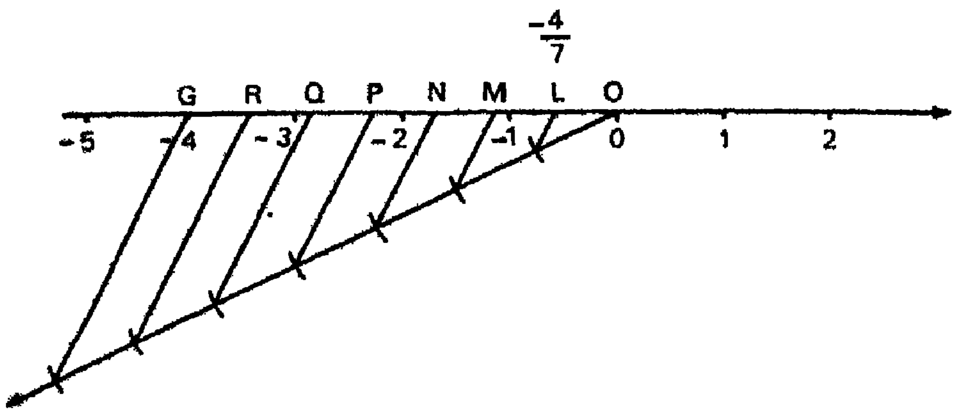
हम OD को तीन समान रेखाखंडों OE, EF तथा FD में त्रिभाजित करते



आकृति 1.3 : $\frac{5}{3}$ का निरूपण

है जैसाकि आकृति 1.3 में दिखाया गया है। तब बिन्दु E, परिमेय संख्या $\frac{5}{3}$ को निरूपित करता है।

अंत में, आइए परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{-4}{7}$ को निरूपित करें। हम इस



आकृति 1.4 : $\frac{-4}{7}$ का निरूपण

संख्या को ऋण चार-सातवाँ पढ़ते हैं। अत: हम 0 से -4 तक की दूरी (अन्तराल) OG लेते हैं। [ध्यान दीजिए कि बिंदु G संख्या -4 को निरूपित करता है।] अब हम OG को सात समान रेखाखंडों OL, LM, MN, NP, PQ, QR तथा RG में विभाजित करते हैं। तब बिंदु L, संख्या $-\frac{4}{7}$ को निरूपित करता है। (देखिए आकृति 1.4)

इस विधि से किसी* भी परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। आइए, एक उदाहरण लें।

उदाहरण : मान लीजिए बिंदु O और A संख्या रेखा पर क्रमश: 0 और 1 निरूपित करते हैं। किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और A के बीच में तीन बिंदु अंकित कीजिए।

[संकेत : एक विधि यह है कि OA को चार समान रेखाखंडों, उदाहरणार्थ OB, BC, CD तथा DA में विभाजित कर लिया जाए। तब, B संख्या $\frac{1}{4}$ निरूपित करेगा, C संख्या $\frac{2}{4}$ निरूपित करेगा, तथा D संख्या $\frac{3}{4}$ निरूपित करेगा।]

प्रश्नावली 1.3

1. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :

   (i) $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{9}{4}$ (iii) $\frac{-3}{8}$ (iv) $-\frac{10}{4}$

*हमने यह सीखा है कि धनात्मक हरों वाली परिमेय संख्याओं को किस प्रकार निरूपित किया जाता है। हम यह आगे दिखाएँगे कि यदि हर ऋणात्मक हो तो भी परिमेय संख्या को इस प्रकार लिखना सदैव संभव है कि उसका हर धनात्मक हो जाये।

2. मान लीजिए O, A और B संख्या रेखा पर क्रमश 0, 2 और -1 को निरूपित करते हैं।
   (*i*) किन्हीं पांच परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और A के बीच में पांच बिंदु अंकित कीजिए। आपने कौन सी संख्याएँ निरूपित की हैं ?
   (*ii*) किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं को निरूपित करने के लिए O और B के बीच में तीन बिंदु अंकित कीजिए। आपने कौन सी संख्याएँ निरूपित की हैं ?
3. संख्या रेखा पर निम्न परिमेय संख्याओं को निरूपित करने वाले बिंदु अंकित कीजिए :

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}$$

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय संख्याएँ	हर
भिन्न	संख्या रेखा पर निरूपण
अंश	

एकक II

परिमेय संख्याओं का योग एवं व्यवकलन

इस एकक में हम यह सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है तथा साथ ही हम इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे ।

2.1 भूमिका

परिमेय संख्याओं का योग और व्यवकलन सीखने से पहले हमें यह जानना आवश्यक है कि दो परिमेय संख्याएं समान (equal) कब होती हैं। आइए, निम्न स्थिति पर विचार करें :

मान लीजिए, हम 2 दर्जन केले तीन व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटते हैं। प्रत्येक को क्या मिलेगा ? हम देखते हैं कि प्रत्येक व्यक्ति को $\frac{2}{3}$ दर्जन (अर्थात् 8) केले मिलते हैं। अब मान लीजिए, हम 4 दर्जन केले छः व्यक्तियों में बराबर-बराबर बाँटते हैं। प्रत्येक को क्या मिलेगा ? पुनः हम देखते हैं कि प्रत्येक व्यक्ति को $\frac{4}{6}$ दर्जन (अर्थात् 8) केले मिलते हैं।

उपर्युक्त से सुझाव* मिलता है कि हमें परिमेय संख्या $\frac{2}{3}$ को परिमेय संख्या $\frac{4}{6}$

* साथ ही, यदि हम संख्याओं $\frac{2}{3}$ और $\frac{4}{6}$ को संख्या रेखा पर निरूपित करें तो हम देखते हैं कि दोनों संख्याएँ एक ही बिंदु से निरूपित हो जाती हैं।

के समान (बराबर) समझना चाहिए। (क्यों ?) हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{2}{3}=\frac{4}{6} \qquad (1)$$

(1) में हम देखते हैं कि

$$2\times6=3\times4 \qquad (2)$$

हम कहते हैं कि परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ समान होती हैं यदि

$a\times d=b\times c$ हो।

हम इसे $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ लिखते हैं।

आइए, अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : निम्न परिमेय संख्याओं के युग्मों में से कौन से युग्म समान हैं ?

(*i*) $\frac{10}{15}, \frac{2}{3}$ (*ii*) $\frac{-3}{5}, \frac{-3}{-5}$

(*iii*) $\frac{4}{9}, \frac{-4}{-9}$ (*iv*) $\frac{-2}{3}, \frac{2}{-3}$

हल : (*i*) क्या $10\times3=15\times2$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{10}{15}=\frac{2}{3}$$

(*ii*) क्या $(-3)\times(-5)=5\times(-3)$ है ? नहीं, ऐसा नहीं है। (क्यों ?) इस प्रकार, $\frac{-3}{5}$ और $\frac{-3}{-5}$ समान नहीं हैं। हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{-3}{5}\neq\frac{-3}{-5}$$

(*iii*) क्या $4\times(-9)=9\times(-4)$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{4}{9}=\frac{-4}{-9}$$

(*iv*) क्या $(-2)\times(-3)=3\times2$ है ? हाँ, है। इस प्रकार,

$$\frac{-2}{3}=\frac{2}{-3}$$

(*iv*) में हम देखते हैं कि किस प्रकार एक ऐसी परिमेय संख्या को जिसका हर ऋणात्मक है एक ऐसी परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है जिसका हर धनात्मक है। हम केवल अंश का चिन्ह बदल देते हैं।

इस प्रकार,

$$\frac{16}{-17} = \frac{-16}{17}, \quad \frac{21}{-23} = \frac{-21}{23}, \quad \frac{-8}{13} = \frac{(-8)}{13} = -\frac{8}{13}$$

अगले उदाहरण में परिमेय संख्याओं का एक मूलभूत गुण प्राप्त होगा है। इसके अनुसार हम परिमेय संख्या के अंश तथा हर में निहित उभयनिष्ठ गुणनखंडों को काट सकते हैं।

उदाहरण 2 : यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है तथा m कोई शून्येतर (non-zero) पूर्णांक है, तो

$$\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$$

आपको याद होगा कि तीन पूर्णांकों को हम किसी भी क्रम में गुणा कर सकते हैं। इस प्रकार, यदि a, m तथा b तीन पूर्णांक हों तो हम देख पाते हैं कि

$$(m \times a) \times b = (m \times b) \times a$$

अतः हम कह सकते हैं कि परिमेय संख्याएं $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{m \times a}{m \times b}$ समान* हैं। क्या आप जानते हैं कि ये क्यों समान हैं? हमने परिमेय संख्याओं की समानता की परिभाषा का प्रयोग किया है।

हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{m \times a}{m \times b} = \frac{a}{b}$$

उदाहरणार्थ, $\frac{6}{9} = \frac{3 \times 2}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$;

*m शून्येतर पूर्णांक होना चाहिए।

$$\frac{12}{20}=\frac{3\times4}{5\times4}=\frac{3}{5};$$

$$\frac{-16}{40}=\frac{8\times(-2)}{8\times5}=\frac{-2}{5}$$

जब किसी परिमेय संख्या के अंश तथा हर में 1 के अतिरिक्त कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो तो हम कहते हैं कि वह परिमेय संख्या *निम्नतम पदों* (**lowest terms**) में है, या यह कि परिमेय संख्या *निम्नतम पदों* में व्यक्त की गई है।

उदाहरण 3 : $\frac{64}{48}$ तथा $\frac{2916}{1440}$ को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए।

हल : $\frac{64}{48}=\frac{16\times4}{16\times3}=\frac{4}{3}$

$$\frac{2916}{1440}=\frac{9\times4\times9\times9}{9\times4\times40}=\frac{81}{40}$$

प्रश्नावली 2.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं के युग्मों में से कौन से युग्म समान हैं ?

(*i*) $\frac{0}{1},\frac{0}{3}$

(*ii*) $\frac{5}{20},\frac{1}{4}$

(*iii*) $\frac{3}{7},\frac{-3}{7}$

(*iv*) $\frac{-200}{3},\frac{20}{3}$

(*v*) $\frac{101}{10},\frac{1010}{100}$

2. परिमेय संख्या $\frac{3}{5}$ के बराबर विभिन्न रूपों वाली पाँच परिमेय संख्याएँ लिखिए।
3. निम्न में से प्रत्येक को दुबारा इस प्रकार लिखिए कि इनका हर धनात्मक हो :

$$\frac{5}{-3}, \frac{-22}{-10}, \frac{-729}{-27}$$

4. निम्न में से प्रत्येक को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :

$$\frac{84}{48}, \frac{101}{202}, \frac{-120}{45}, \frac{545}{1460}, \frac{11}{17}$$

2.2 धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ

आइए परिमेय संख्या की परिभाषा का पुनरावलोकन करें। यह ऐसी संख्या है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में रखा जा सकता है जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है। साथ ही, याद कीजिए कि p परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ का अंश कहलाता है तथा q हर कहलाता है।

अब चूँकि p और q पूर्णांक हैं अतः इनमें से प्रत्येक या तो धनात्मक हो सकता है या ऋणात्मक। थोड़ी देर के लिए हम उस स्थिति की चिंता न करें जब p शून्य होगा।

हम कहते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ धनात्मक होती है यदि उसके अंश और हर दोनों धनात्मक हों या दोनों ऋणात्मक हों। परन्तु यदि अंश धनात्मक और हर ऋणात्मक हो अथवा अंश ऋणात्मक और हर धनात्मक हो तो हम कहते हैं कि परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ ऋणात्मक है। दूसरे शब्दों में, यदि अंश और हर समान

चिन्ह (same sign) के हों तो परिमेय संख्या धनात्मक होती है। परन्तु यदि अंश और हर विपरीत चिन्हों (opposite signs) के हों तो परिमेय संख्या ऋणात्मक होती है। $\frac{2}{3}$, $\frac{545}{1460}$, $\frac{-4}{-5}$, $\frac{-729}{-273}$, इत्यादि धनात्मक परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं। $\frac{-20}{13}$, $\frac{-162}{483}$, $\frac{23}{-71}$, $\frac{1635}{-2750}$, इत्यादि ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के उदाहरण हैं।

हम यह पहले देख चुके हैं कि किस प्रकार एक ऐसी परिमेय संख्या को जिसका हर ऋणात्मक है एक ऐसी परिमेय संख्या के रूप में लिखा जा सकता है जिसका हर धनात्मक है। क्या आपको याद है कि यह किस प्रकार किया जाता है? हम केवल अंश का चिन्ह बदल देते हैं। इस प्रकार, $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3}$। परम्परागत हम इन परिमेय संख्याओं में से प्रत्येक को $-\frac{2}{3}$ लिखते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{214}{-721} = \frac{-214}{721} = -\frac{214}{721}$$

परिमेय संख्या 0 न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक।

हम देखते हैं कि संख्या रेखा पर धनात्मक परिमेय संख्याएं निरूपित करने वाले बिंदु शून्य के दाईं ओर स्थित हैं। साथ ही ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ निरूपित करने वाले बिंदु शून्य के बाईं ओर स्थित हैं।

प्रश्नावली 2.2

1. निम्न में से कौन सी संख्याएँ धनात्मक हैं और कौन सी ऋणात्मक? यह भी बताइए कि संख्या रेखा पर ये संख्याएँ शून्य के किस ओर स्थित होंगी।

(i) $\frac{103}{5}$ (ii) $\frac{-702}{7}$

(iii) $\frac{5}{-8}$ (iv) $\frac{8}{-13}$

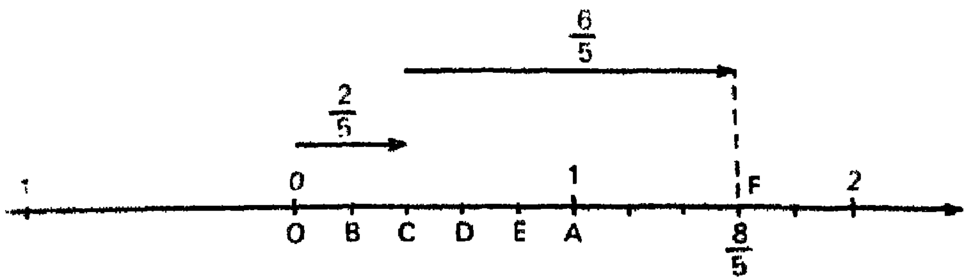
(v) $\frac{921}{-6}$

2.3 परिमेय संख्याओं का योग

शीला अपनी सहेली राधा के घर $\frac{2}{5}$ किलोमीटर की दूरी चलकर पहुँचती है। उससे मिलने के बाद वह उसी दिशा में $\frac{6}{5}$ किलोमीटर चलकर एक अन्य सहेली इन्द्रा के घर पहुँचती है। उसने अपने घर से इन्द्रा के घर तक पहुँचने में कितनी दूरी चली? दूसरे शब्दों में, हम $\frac{2}{5}$ और $\frac{6}{5}$ का योग ज्ञात करना चाहते हैं। आइए $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}$ ज्ञात करने के लिए पहले संख्या रेखा का प्रयोग करें। हम कैसे प्रारम्भ करें? क्या आपको याद है कि हमने पूर्णांकों के लिए क्या किया था?

हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA को पाँच समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं जैसा कि आकृति 2.1 में दिखाया गया है। तब B संख्या $\frac{1}{5}$ तथा C संख्या $\frac{2}{5}$ निरूपित करता है। दूसरे शब्दों में, $OB=\frac{1}{5}$ तथा $OC=\frac{2}{5}$ है। अब हम C से प्रारम्भ करेंगे और दाईं ओर (क्यों?) छः पद (steps)

इस प्रकार चलेंगे कि प्रत्येक पग OB अर्थात् $\frac{1}{5}$ के बराबर हो। मान लीजिए



आकृति 2.1 : $\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$

अंत में हम बिन्दु F पर पहुंचते हैं। OF में OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर कितने पग हैं ? OF में ऐसे आठ पग हैं। इस प्रकार,

$$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{8}{5}$$

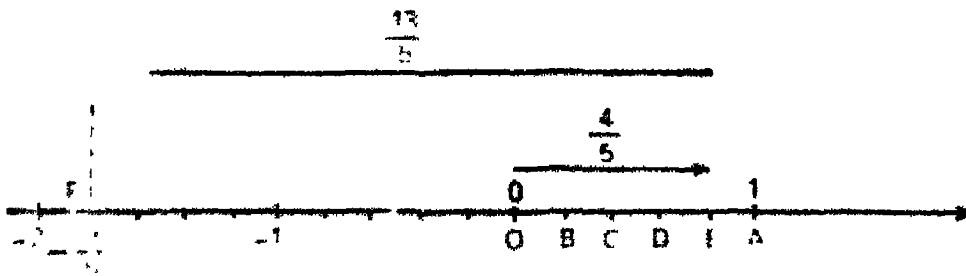
इस प्रकार शीला ने अपने घर से इन्द्रा के घर तक पहुँचने में $\frac{8}{5}$ किलोमीटर की दूरी चली।

हम देखते हैं कि $\frac{2}{5}$ और $\frac{6}{5}$ में हर समान हैं। साथ ही, यदि हम अंशों को जोड़ लें तथा योग को (समान) हर से विभाजित कर दें तो हमें वाँछित परिणाम प्राप्त हो जाता है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{2}{5}+\frac{6}{5}=\frac{2+6}{5}=\frac{8}{5}$$

आइए एक अन्य उदाहरण लें। मान लीजिए हम $\frac{4}{5}$ और $\frac{-13}{5}$ को जोड़ना

आइए हैं। पिछले उदाहरण की ही तरह हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA को पाँच समान रेखाखण्डों में विभाजित करते हैं। (देखिए आकृति 2.2)



आकृति 2.2. $\frac{4}{5}+\left(\frac{-13}{5}\right)=\frac{-9}{5}$

तब B संख्या $\frac{1}{5}$ तथा E संख्या $\frac{4}{5}$ निरूपित करता है। दूसरे शब्दों में, $OB=\frac{1}{5}$ तथा $OE=\frac{4}{5}$ है। अब हम E से प्रारम्भ करके बाईं ओर (क्यों?) तेरह पग इस प्रकार चलते हैं कि प्रत्येक पग OB अर्थात् $\frac{1}{5}$ के बराबर है। मान लीजिए कि अन्त में हम बिंदु F पर आ जाते हैं। OF में OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर कितने पग हैं? OF में ऐसे नौ पग हैं। इस प्रकार,

$$\frac{4}{5}+\left(\frac{-13}{5}\right)=\frac{-9}{5}$$

हम पुनः देखते हैं कि $\frac{4}{5}$ और $\frac{-13}{5}$ में हर समान है। साथ ही यदि हम अंशों को जोड़ें तथा योगको (समान) हर से विभाजित कर दें तो हमें वांछित परिणाम

प्राप्त हो जाता है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{4}{5}+\left(\frac{-13}{5}\right)=\frac{4+(-13)}{5}=\frac{-9}{5}$$

[पाठक को चाहिए कि वह उपर्युक्त विधि से, उदाहरणार्थ, $\left(\frac{-3}{5}\right)+\frac{8}{5}$ तथा $\left(\frac{-9}{5}\right)+\left(\frac{-3}{5}\right)$ ज्ञात करे।]

इस प्रकार हमें समान हरों वाली परिमेय संख्याओं के योग के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

यदि $\frac{a}{c}$ और $\frac{b}{c}$ समान हरों वाली दो परिमेय संख्याएँ दी हुई हैं, तो

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

दूसरे शब्दों में, समान हरों वाली दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए हम केवल उनके अंशों को जोड़ते है और इस योग में समान हर का भाग दे देते हैं।

आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1 : $\frac{-3}{5}+\frac{8}{5}$ ज्ञात कीजिए।

हल : उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{-3}{5}+\frac{8}{5}=\frac{-3+8}{5}=\frac{5}{5}=1$$

उदाहरण 2 : $\frac{-9}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः नियम का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{-9}{5}+\left(\frac{-3}{5}\right)=\frac{-9+(-3)}{5}=\frac{-12}{5}=-\frac{12}{5}$$

अब, यदि हर समान न हों तब हम क्या करेंगे ? मान लीजिए हम $\frac{3}{4}$ और $\frac{5}{7}$ को जोड़ना चाहते हैं। हम कैसे प्रारम्भ करें ? यदि हम किसी प्रकार इनके हरों को समान बना सकें तो हम उस नियम का प्रयोग कर सकते हैं जो हमने अभी सीखा है। हम इनके हरों को समान कैसे बनाएंगे ?

आपको याद होगा कि एक परिमेय संख्या को निम्नतम पदों में व्यक्त करने के लिए हमने क्या किया था। हमने अंश तथा हर में निहित उभयनिष्ठ गुणनखंड को काट दिया था। आइए हम पर एक अन्य दृष्टिकोण से विचार करें। यदि एक परिमेय संख्या दी हुई हो तो क्या हम उसके अंश और हर को एक ही शून्येतर संख्या से गुणा नहीं कर सकते ? निश्चय ही, हम ऐसा कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{2}{3}=\frac{2\times4}{3\times4}=\frac{8}{12};\quad \frac{2}{3}=\frac{2\times(-5)}{3\times(-5)}=\frac{-10}{-15};\ \text{इत्यादि}$$

आइए, अब हम अपनी $\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$ को ज्ञात करने की समस्या पर वापिस आ जाएँ।

हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{3}{4}=\frac{3\times7}{4\times7}$$

तथा,
$$\frac{5}{7}=\frac{5\times4}{7\times4}$$

अब इनके हर समान बना दिए गए हैं। इस प्रकार,

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{3\times7}{4\times7}+\frac{5\times4}{7\times4}=\frac{21}{28}+\frac{20}{28}=\frac{21+20}{28}$$

$$\text{अर्थात्, } \frac{3}{4}+\frac{5}{7}=\frac{41}{28}$$

इस प्रकार हमें किन्हीं दो परिमेय संख्याओं को जोड़ने के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

यदि $\frac{a}{b}$ तथा $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएं हैं, तो

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

दूसरे शब्दों में, किन्हीं दो परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए,

(1) पहले हम उनके हरों को समान बनाते हैं, तथा

(2) फिर समान हरों वाली परिमेय संख्याओं के योग का नियम प्रयोग करते हैं।

अब हम इस नियम को कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करते हैं।

उदाहरण 3 : $\frac{-2}{3}$ तथा $\frac{5}{8}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{-2}{3}+\frac{5}{8}=\frac{(-2)\times 8+3\times 5}{3\times 8}=\frac{-16+15}{24}$

अर्थात्, $\frac{-2}{3}+\frac{5}{8}=\frac{-1}{24}=-\frac{1}{24}$

उदाहरण 4 : $\frac{27}{16}+\frac{15}{21}$ परिकलित कीजिए।

हल : $\frac{27}{16}+\frac{15}{21}=\frac{27\times 21+16\times 15}{16\times 21}=\frac{567+240}{336}$

अर्थात्, $\frac{27}{16}+\frac{15}{21}=\frac{807}{336}$

आपको याद होगा कि पूर्णांकों को हम चाहे किसी भी क्रम में जोड़ें उससे कुछ अन्तर नहीं पड़ता। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं ? क्या

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$ है ?

निश्चय ही, ऐसा है। क्योंकि,

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{bc+ad}{bd} \quad \text{(क्यों ?)}$$

$$=\frac{bc}{bd}+\frac{ad}{bd}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

क्या आपको इस गुण का नाम याद है ? हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं का योग क्रमविनिमेय है। परन्तु यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो याद रखना महत्वपूर्ण है वह है कि परिमेय संख्याओं को चाहे हम किसी भी क्रम में जोड़ें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएं हैं, तो

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

यदि हम योग के लिए एक संक्रिया सारणी (**operation table for addition**) बना लें तो यह गुण बहुत अच्छी प्रकार से समझा जा सकता है। आइए केवल पांच परिमेय संख्याएँ, उदाहरणार्थ, $-\frac{2}{5}$, $\frac{-1}{5}$, 0, $\frac{1}{5}$ तथा

$\frac{2}{5}$ ही लें। हमें निम्न सारणी प्राप्त होती है :

		दूसरी संख्या				
	+	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
पहली संख्या	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0
	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$
	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$
	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$
	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$

मुख्य विकर्ण

क्या आपको याद है कि इस सारणी को किस प्रकार 'पढ़ा' जाता है ? दो संख्याओं का योग वहाँ दिया है जहाँ इन संख्याओं वाले 'पंक्ति' और 'स्तंभ' परस्पर प्रतिच्छेद करते हैं।

हम देखते हैं कि संक्रिया सारणी मुख्य विकर्ण के सापेक्ष सममित (symmetrical) है। सारणी से, उदाहरणार्थ, यह तुरन्त स्पष्ट हो जाता है कि $\frac{-2}{5}+\frac{-1}{5}=\frac{-1}{5}+\frac{-2}{5}$, $0+\frac{2}{5}=\frac{2}{5}+0$, इत्यादि।

हम सारणी से यह भी देखते हैं कि

$$0 + \frac{-2}{5} = \frac{-2}{5}$$

$$0 + \frac{-1}{5} = \frac{-1}{5}$$

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$$

$$0 + \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

क्या यह वही नहीं है जिसकी हम आशा कर सकते थे ? हाँ, यह वही है। यदि $\frac{a}{b}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{0}{1} + \frac{a}{b} = \frac{0 \times b + 1 \times a}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

दूसरे शब्दों में, शून्य और किसी परिमेय संख्या का योग स्वयं वह परिमेय संख्या ही होती है। यह शून्य का योज्य गुण (addition property of zero) कहलाता है तथा 0, योग के लिए तत्समक अवयव (identity element) कहलाता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो इस स्तर पर महत्वपूर्ण है वह है इस गुण का ज्ञान तथा यह जानना कि इस गुण का व्यावहारिक स्थितियों में सही प्रकार से किस प्रकार प्रयोग किया जा सकता है।

संकेतों का प्रयोग कर हम उपर्युक्त गुण को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है, तो

$$0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$$

अब यदि हमें तीन परिमेय संख्याओं को जोड़ना हो तो क्या होगा ?

हरि स्कूल से घर आता है। वह अपना गृह-कार्य पूरा करने के लिए बैठता है। वह गणित पर $\frac{3}{4}$ घंटे, सामाजिक विज्ञान पर $\frac{2}{3}$ घंटे तथा हिन्दी पर 1 घंटा

व्यतीत करता है। वह अपना गृह-कार्य पूरा करने में कितना समय व्यतीत करता है? दूसरे शब्दों में, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ तथा 1 का योग ज्ञात करने के लिए आप क्या करेंगे? आप शायद पहले $\frac{3}{4}$ और $\frac{2}{3}$ का योग ज्ञात करेंगे और फिर योग में 1 जोड़ेंगे। योग ज्ञात करने की इस विधि को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)+1=\left(\frac{3\times3+4\times2}{4\times3}\right)+1=\frac{17}{12}+1=\frac{17\times1+12\times1}{12\times1}=\frac{29}{12}$$

आइए अब देखें कि यदि हम पहले $\frac{2}{3}$ और 1 को जोड़ें तथा फिर इस योग में $\frac{3}{4}$ जोड़ें तो हमें क्या योग प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}+1\right)$ कितना है? हम देखते हैं कि

$$\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{3}{4}+\left(\frac{2\times1+3\times1}{3\times1}\right)=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}=\frac{29}{12}$$

इस प्रकार,

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\right)+1=\frac{3}{4}+\left(\frac{2}{3}+1\right)$$

हम देखते है कि हरि को गृह-कार्य पूरा करने में $\frac{29}{12}$ घंटे लगेंगे।

उपर्युक्त उदाहरण से (परिमेय संख्याओं के) योग का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण कि परिमेय संख्याओं का योग सहचारी होता है, स्पष्ट होता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह यह याद रखना कि तीन परिमेय संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए इससे कोई अन्तर नहीं पड़ता कि पहले हम कौन सी दो संख्याएँ लेते हैं और फिर इनके योग में बची हुई तीसरी संख्या जोड़ते हैं।

संकेतों का प्रयोग करके हम परिमेय संख्याओं के योग के साहचर्य गुण

(associative property of addition) को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

इस गुण के फलस्वरूप ही हम: प्राय: इन बराबर योगों के स्थान पर $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}$ लिखते हैं।

उदाहरण 5 : जाँच कीजिए कि

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{20}+\frac{3}{11}\right)=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{20}\right)+\frac{3}{11}$$

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{20}+\frac{3}{11}\right)=\frac{1}{10}+\left(\frac{9\times 11+20\times 3}{20\times 11}\right)$$

$$=\frac{1}{10}+\frac{159}{220}$$

$$=\frac{1\times 220+10\times 159}{10\times 220}=\frac{1810}{2200}=\frac{181}{220}$$

तथा, $\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{20}\right)+\frac{3}{11}=\left(\frac{1\times 20+10\times 9}{10\times 20}\right)+\frac{3}{11}$

$$=\frac{110}{200}+\frac{3}{11}$$

$$=\frac{110\times 11+200\times 3}{200\times 11}=\frac{1810}{2200}=\frac{181}{220}$$

इस प्रकार, $\frac{1}{10}+\left(\frac{9}{20}+\frac{3}{11}\right)=\left(\frac{1}{10}+\frac{9}{20}\right)+\frac{3}{11}$

अंत में, आइए अब देखें कि हम चार या अधिक परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ते हैं। हम योग के क्रमविनिमेय और साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो सम्भवतया कई बार, प्रयोग करते हैं। इस स्तर पर यह महत्वपूर्ण नहीं है कि हम इन गुणों का प्रयोग प्रत्येक पग (step) पर बताते जाएँ। जो महत्वपूर्ण है वह है

'इस प्रयोग का परिणाम'। परिणाम है कि यदि कई परिमेय संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उनको उसी क्रम में जोड़ा जाए जिसमें वे दी हुई हैं। हम उनके किसी भी क्रम में समूह बना सकते हैं और फिर उनका योग ज्ञात कर सकते हैं। यह योग का पुनर्व्यवस्थितकरण गुण (**rearrangement property of addition**) कहलाता है।

अब हम इसे एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 6 : $\frac{5}{11}, \frac{20}{21}, \frac{-13}{11}$ तथा $\frac{6}{7}$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : चूँकि $\frac{5}{11}$ और $\frac{-13}{11}$ के हर समान हैं, अतः पहले इनका योग ज्ञात करना अधिक सुविधाजनक प्रतीत होता है। हमें निम्न योग प्राप्त होता है :

$$\frac{5}{11}+\frac{20}{21}+\frac{-13}{11}+\frac{6}{7}=\left(\frac{5}{11}+\frac{-13}{11}\right)+\left(\frac{20}{21}+\frac{6}{7}\right)$$

$$=\left(\frac{5+(-13)}{11}\right)+\left(\frac{20\times7+21\times6}{21\times7}\right)$$

$$=\frac{-8}{11}+\frac{266}{147}$$

$$=\frac{(-8)\times147+11\times266}{11\times147}$$

$$=\frac{-1176+2926}{1617}=\frac{1750}{1617}$$

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि यदि वह किसी अन्य क्रम में इन संख्याओं के समूह बनाए (पुनर्व्यवस्थित करे) तो भी उसे यही योग प्राप्त होगा।]

प्रश्नावली 2.3

1. परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात करने के लिए संख्या रेखा का प्रयोग कीजिए :

(i) $\frac{-3}{5}, \frac{8}{5}$ (ii) $\frac{-9}{5}, \frac{-3}{5}$

(viii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (ix) $\frac{5}{7}, \frac{-10}{14}$

2. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{11}{8}, \frac{33}{8}$ (ii) $\frac{112}{13}, \frac{-298}{13}$

(iii) $\frac{-2218}{131}, \frac{1079}{131}$ (iv) $\frac{-35009}{149}, \frac{-4999}{149}$

(v) $\frac{1}{9}, \frac{23}{9}, \frac{27}{9}$ (vi) $\frac{-141}{29}, \frac{729}{29}, \frac{-233}{29}$

(vii) $\frac{20293}{1001}, \frac{-30993}{1001}, \frac{-9875}{1001}, \frac{131}{1001}$

3. परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{8}{17}, \frac{3}{-10}$ (ii) $\frac{5}{16}, \frac{2}{9}$

(iii) $\frac{8}{19}, \frac{-2}{9}$ (iv) $\frac{-5}{18}, \frac{-17}{8}$

(v) $6, \frac{7}{5}$ (vi) $8, \frac{-3}{2}$

(vii) $\frac{20}{-9}, \frac{107}{81}$ (viii) $\frac{15}{7}, \frac{-80}{11}$

(ix) $\frac{-9}{80}, -7$ (x) $\frac{607}{71}, \frac{-73}{91}$

4. निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

(i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{11}{13}$ (ii) $\frac{11}{13}+\frac{13}{11}+\left(\frac{-17}{11}\right)$

(iii) $1+\left(\frac{-1}{2}\right)+\frac{1}{3}$ (iv) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{1}{5}$

(v) $\frac{9}{7}+\frac{2}{11}+\frac{3}{5}$ (vi) $\frac{-13}{169}+\frac{11}{13}+\frac{9}{2}$

(vii) $-\frac{100}{125}+\frac{200}{25}+\frac{275}{125}$ (viii) $\frac{3}{8}+\frac{11}{3}+\frac{6}{15}+\frac{13}{2}$

(ix) $\frac{121}{100}+\frac{100}{11}+\left(\frac{-63}{10}\right)+\frac{17}{50}$

(x) $\frac{101}{303}+\frac{303}{202}+\left(\frac{-666}{111}\right)+9$

5. परिकलित कीजिए :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$$

6. विनय अपने मासिक वेतन का $\frac{2}{5}$वाँ भाग खाने पर, $\frac{1}{10}$वाँ भाग अपने दो बच्चों की शिक्षा पर तथा एक-चौथाई भाग किराये पर व्यय करता है। वह अपने वेतन का कौन सा भाग व्यय करता है ?

2.4 परिमेय संख्या का ऋणात्मक

धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याओं से स्वाभाविक युग्मों, उदाहरणार्थ, 1 और -1, $\frac{1}{2}$ और $\frac{-1}{2}$, 2 और -2, $\frac{1}{3}$ और $\frac{-1}{3}$, $\frac{2}{3}$ और $\frac{-2}{3}$, इत्यादि का संकेत मिलता है। हम देखते हैं कि प्रत्येक युग्म में योग शून्य है अर्थात् $1+(-1)=0$, $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)=0$, इत्यादि। ऐसे किसी भी युग्म में प्रत्येक परिमेय संख्या, दूसरी परिमेय संख्या का *ऋणात्मक* (*negative*) अर्थात् *योज्य प्रतिलोम* (*additive inverse*) कहलाती है।

अतः, $\frac{1}{2}$ का ऋणात्मक $-\frac{1}{2}$ है, $-\frac{1}{2}$ का ऋणात्मक $\frac{1}{2}$ है, इत्यादि।

इस प्रकार, प्रत्येक शून्येतर परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के लिए एक परिमेय संख्या $\frac{-p}{q}$ ऐसी होती है कि $\frac{p}{q} + \left(\frac{-p}{q}\right) = 0$। $\frac{-p}{q}$, $\frac{p}{q}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योज्य प्रतिलोम) कहलाता है। शून्य का ऋणात्मक स्वयं शून्य ही है। आपको याद होगा कि सामान्यतया $-\frac{p}{q}$ को $\frac{-p}{q}$ लिखा जाता है।

2.5 परिमेय संख्याओं का व्यवकलन

आपको याद होगा कि व्यवकलन, योग की संक्रिया का उल्टा अर्थात् प्रतिलोम (inverse) है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए, यदि हम, $\frac{6}{5}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाना चाहते हैं तो हम पूछते हैं, 'हम $\frac{6}{5}$ प्राप्त करने के लिए $\frac{2}{5}$ में क्या जोड़ें ?' स्पष्टतया उत्तर $\frac{4}{5}$ है।

[संख्या रेखा पर 0 से 1 तक की दूरी OA को पाँच समान रेखाखंडों OB, BC, CD, DE और EA में विभाजित कीजिए। तब B, $\frac{1}{5}$ निरूपित करता है तथा C, $\frac{2}{5}$ निरूपित करता है। $\frac{6}{5}$ को निरूपित करने वाला बिंदु अंकित कीजिए। यदि आप C से प्रारम्भ करें तो प्रत्येक पग OB (अर्थात् $\frac{1}{5}$) के बराबर लेकर आपको $\frac{6}{5}$ तक पहुँचने के लिए दाईं ओर कितने पग चलने पड़ेंगे ?]

आइए, अब $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक ज्ञात करें और उसे $\frac{6}{5}$ में जोड़ें। हमें क्या प्राप्त

होता है ? $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक $\frac{-2}{5}$ है। इसे $\frac{6}{5}$ में जोड़ने से $\frac{4}{5}$ प्राप्त होता है। इस प्रकार,

$$\frac{6}{5}-\frac{2}{5}=\frac{6}{5}+\left(\frac{-2}{5}\right)$$

दूसरे शब्दों में, $\frac{6}{5}$ में से $\frac{2}{5}$ घटाने के लिए हम $\frac{6}{5}$ में $\frac{2}{5}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योज्य प्रतिलोम) जोड़ते हैं। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{a}{b}$ में से $\frac{c}{d}$ घटाने का अर्थ है $\frac{a}{b}$ में $\frac{c}{d}$ का ऋणात्मक (अर्थात् योज्य प्रतिलोम) जोड़ना। इस प्रकार,

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(\frac{-c}{d}\right)$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $\frac{5}{9}$ में से $\frac{3}{7}$ घटाइए।

हल : हम $\frac{5}{9}$ में $\frac{3}{7}$ का ऋणात्मक जोड़ते हैं और हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{5}{9}-\frac{3}{7}=\frac{5}{9}+\left(\frac{-3}{7}\right)=\frac{5\times 7+9\times(-3)}{9\times 7}$$

$$=\frac{35-27}{63}=\frac{8}{63}$$

उदाहरण 2 : $\frac{-4}{3}$ में से $\left(\frac{-16}{21}\right)$ घटाइए।

हल : $\frac{-16}{21}$ का ऋणात्मक $\frac{16}{21}$ है। इस प्रकार,

$$\frac{-4}{3} - \left(\frac{-16}{21}\right) = \frac{-4}{3} + \frac{16}{21} = \frac{(-4) \times 21 + 3 \times 16}{3 \times 21}$$

$$= \frac{-84 + 48}{63} = \frac{-36}{63} = \frac{-4}{7}$$

प्रश्नावली 2.4

1. निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का ऋणात्मक लिखिए :

(i) $\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{-3}{7}$

(iii) $\frac{3}{-7}$ (iv) $\frac{-2}{-3}$

(v) $\frac{-5}{4}$

2. घटाइए :

(i) $\frac{5}{-9}$ में से $\frac{3}{7}$ (ii) $\frac{-5}{21}$ में से $\frac{9}{20}$

(iii) $\frac{-3}{10}$ में से 11 (iv) 5 में से $\frac{3}{17}$

(v) $\frac{20}{13}$ में से $\frac{7}{11}$ (vi) $\frac{-3}{4}$ में से $\frac{-3}{4}$

(vii) 0 में से $\frac{-5}{6}$ (viii) $\frac{-3}{8}$ में से 0

(ix) $\frac{198}{11}$ में से $\frac{-210}{121}$ (x) $\frac{237}{26}$ में से $\frac{1017}{-234}$

3. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$ (ii) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{9}\right) - \frac{10}{13}$

(iii) $\left(\frac{2}{3}+\frac{3}{7}\right)-\frac{5}{7}$ (iv) $\left(\frac{9}{10}+\frac{7}{23}\right)+\frac{10}{31}$

4. $\frac{9}{13}$ में से $\frac{11}{9}$ घटाइए। $\frac{11}{9}$ में से $\frac{9}{13}$ घटाइए। क्या

$$\frac{11}{9}-\frac{9}{13}=\frac{9}{13}-\frac{11}{9} \text{ है ?}$$

5. $\frac{7}{10}-\left(\frac{2}{11}-\frac{5}{7}\right)$ परिकलित कीजिए। $\left(\frac{7}{10}-\frac{2}{11}\right)-\frac{5}{7}$ परिकलित कीजिए। क्या

$$\frac{7}{10}-\left(\frac{2}{11}-\frac{5}{7}\right)=\left(\frac{7}{10}-\frac{2}{11}\right)-\frac{5}{7} \text{ है ?}$$

6. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{16}{21}$ है। यदि इनमें से एक संख्या $\frac{116}{441}$ है तो दूसरी ज्ञात कीजिए।

7. विनय अपने मासिक वेतन का $\frac{2}{5}$ वां भाग खाने पर, $\frac{1}{10}$ वां भाग अपने दो बच्चों की शिक्षा पर तथा एक-चौथाई भाग किराए पर व्यय करता है। उसके वेतन का कितना भाग उसके पास शेष रहता है ?

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय संख्याओं की समानता	निम्नतम पदों में परिमेय संख्याएँ
धनात्मक और ऋणात्मक परिमेय संख्याएँ	परिमेय संख्याओं का योग
परिमेय संख्या का ऋणात्मक	परिमेय संख्याओं का व्यवकलन

परिमेय संख्याओं का गुणन एवं विभाजन

अब हम सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं का गुणा और भाग किस प्रकार किया जाता है तथा साथ ही हम इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन करेंगे। हम यह भी सीखेंगे कि परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जाती है।

3.1 परिमेय संख्याओं का गुणन

एकक II में हमने सीखा था कि परिमेय संख्याओं को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है तथा साथ ही हमने इन संक्रियाओं के गुणों का भी अध्ययन किया था। ये गुण हमारे लिए नए नहीं हैं। हम पहले ही देख चुके हैं कि धनपूर्णांकों और पूर्णांकों के योग और व्यवकलन में भी यही गुण विद्यमान हैं।

आइए अब देखें कि परिमेय संख्याओं का गुणा और भाग किस प्रकार किया जाता है। हमें परिमेय संख्याओं का गुणन और विभाजन किस प्रकार परिभाषित करना चाहिए? हम इनको बिल्कुल इस प्रकार परिभाषित करना चाहेंगे कि इनमें भी वही गुण हों जो धनपूर्णांकों और पूर्णांकों के गुणन और विभाजन में हैं।

आपको याद होगा कि पूर्णांकों के गुणन को बार-बार योग (repeated addition) समझा जा सकता है। आइए, परिमेय संख्याओं का गुणन परिभाषित करने के लिए, इसका अभिप्रेरण (motivation) के रूप में प्रयोग करें। उदाहरणार्थ, 6 और $\frac{1}{2}$ के गुणन पर विचार कीजिए। यह समझते हुए कि यह बार बार योग है, हम निम्न प्राप्त करते हैं :

$$6 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{18}{5}$$

इसी प्रकार,

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9},$$

$$7 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2},$$

इत्यादि। हम देखते हैं कि

$$6 \times \frac{3}{5} = \frac{6}{1} \times \frac{3}{5} = \frac{6 \times 3}{1 \times 5} = \frac{18}{5},$$

$$3 \times \frac{4}{9} = \frac{3 \times 4}{1 \times 9} = \frac{12}{9},$$

$$7 \times \frac{1}{2} = \frac{7 \times 1}{1 \times 2} = \frac{7}{2}, \text{ इत्यादि।}$$

इस प्रकार, गुणनफल ज्ञात करने के लिए हम प्रत्येक स्थिति में अंशों का गुणा करते हैं और हरों के गुणनफल से भाग दे देते हैं। ठीक इसी प्रकार से हम दो परिमेय संख्याओं का गुणन परिभाषित करेंगे। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ परिमेय संख्याएँ हैं, तो हम इनके गुणनफल को $\frac{a \times c}{b \times d}$ के रूप में परिभाषित करते हैं तथा निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{\text{अंशों का गुणनफल}}{\text{हरों का गुणनफल}}$$

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : गुणा कीजिए :

(*i*) 15 और $\frac{4}{11}$ (*ii*) 8 और $\frac{16}{7}$

(*iii*) 21 और $\frac{13}{-7}$ (*iv*) 32 और $\frac{102}{203}$

हल : हम केवल परिभाषा का प्रयोग करते हैं। इससे हमें निम्न गुणनफल प्राप्त होते हैं :

(*i*) $15 \times \frac{4}{11} = \frac{15 \times 4}{1 \times 11} = \frac{60}{11}$

(*ii*) $8 \times \frac{16}{7} = \frac{8 \times 16}{1 \times 7} = \frac{128}{7}$

(*iii*) $21 \times \frac{-13}{7} = 21 \times \left(\frac{-13}{7}\right) = \frac{-21 \times 13}{1 \times 7} = \frac{-273}{7}$

हम देखते हैं कि अंश और हर में 7 उभयनिष्ठ है। अतः हम उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को काट कर निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{-273}{7} = \frac{-7 \times 39}{7} = -39$$

(*iv*) $32 \times \frac{102}{203} = \frac{32 \times 102}{1 \times 203} = \frac{3264}{203}$

उदाहरण 2 : गुणा कीजिए :

(*i*) $\frac{8}{7}$ और $\frac{13}{27}$ (*ii*) $\frac{18}{25}$ और $\frac{-4}{41}$

(*iii*) $\frac{11}{8}$ और $\frac{88}{7}$ (*iv*) $\frac{-23}{29}$ और $\frac{-37}{19}$

हल : पुनः हम केवल परिभाषा का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

(*i*) $\frac{8}{7} \times \frac{13}{27} = \frac{8 \times 13}{7 \times 27} = \frac{104}{189}$

(*ii*) $\frac{18}{25} \times \frac{-4}{41} = \frac{18 \times (-4)}{25 \times 41} = \frac{-72}{1025}$

(*iii*) $\frac{11}{8} \times \frac{88}{7} = \frac{11 \times 88}{8 \times 7} = \frac{11 \times 8 \times 11}{8 \times 7} = \frac{11 \times 11}{1 \times 7}$

$$= \frac{121}{7}$$

(ii) $\frac{-23}{29} \times \frac{-37}{19} = \frac{(-23) \times (-37)}{29 \times 19} = \frac{851}{551}$

आपको याद होगा कि दो पूर्णांकों को हम चाहे जिस क्रम में गुणा करें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं ? क्या $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$ है ? निश्चय ही, ऐसा है, क्योंकि

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{c \times a}{d \times b} \text{ (क्यों ?) } = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

क्या आपको इस गुण का नाम याद है ? हम कहते हैं कि परिमेय संख्याओं का गुणन क्रमविनिमेय है। परन्तु यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह है यह याद रखना कि दो परिमेय संख्याओं को हम चाहे जिस क्रम में गुणा करें उससे कुछ अंतर नहीं पड़ता। अर्थात्,

- यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$$

हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{7}$ परिकलित कीजिए। जांच कीजिए कि

$$\frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{-2}{3}$$

हल : $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{(-2) \times 4}{3 \times 7} = \frac{-8}{21}$

अब, $\frac{4}{7} \times \frac{-2}{3} = \frac{4 \times (-2)}{7 \times 3} = \frac{-8}{21}$

इस प्रकार, $\frac{-2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{-2}{3}$

आइए अब निम्न उदाहरण का अध्ययन करें :

उदाहरण 4 : परिकलित कीजिए :

(i) $0 \times \frac{26}{35}$ (ii) $0 \times \frac{-17}{21}$ (iii) $\frac{211}{-356} \times 0$

हल : गुणन की परिभाषा का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

(i) $0 \times \frac{26}{35} = \frac{0 \times 26}{1 \times 35} = \frac{0}{35} = 0$

(ii) $0 \times \frac{-17}{21} = \frac{0 \times (-17)}{21} = \frac{0}{21} = 0$

(iii) $\frac{211}{-356} \times 0 = \frac{211 \times 0}{-356} = \frac{0}{-356} = 0$

हम देखते हैं कि शून्य और किसी भी परिमेय संख्या का गुणनफल शून्य है। व्यापक रूप में यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{p}{q} \times 0 = 0 \times \frac{p}{q} = 0$$

आपको याद होगा कि यही बात पूर्णांकों के लिए भी सत्य थी। अब 1 और किसी परिमेय संख्या के गुणनफल के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम देखते हैं कि

$$1 \times \frac{11}{23} = \frac{1 \times 11}{1 \times 23} = \frac{11}{23},$$

$$\frac{11}{23} \times 1 = \frac{11 \times 1}{23 \times 1} = \frac{11}{23},$$

$$1 \times \left(\frac{-107}{113}\right) = \frac{1 \times (-107)}{1 \times 113} = \frac{-107}{113},$$

$$\left(\frac{-107}{113}\right) \times 1 = \frac{(-107) \times 1}{113 \times 1} = \frac{-107}{113}, \text{ इत्यादि।}$$

वास्तव में यह भी सरलता से सिद्ध हो सकता है कि यदि $\frac{p}{q}$ एक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{p}{q} \times 1 = 1 \times \frac{p}{q} = \frac{p}{q}$$

दूसरे शब्दों में, 1 और किसी परिमेय संख्या का गुणनफल स्वयं वह परिमेय संख्या ही होती है। यह 1 का गुणन गुण (multiplication property) कहलाता है, तथा 1 परिमेय संख्याओं के गुणन के लिए तत्समक अवयव कहलाता है।

अब यदि हमें तीन परिमेय संख्याओं का गुणा करना हो तो हम क्या करेंगे ? हमें कैसे प्रारम्भ करना चाहिए ? उदाहरणार्थ, परिमेय संख्याओं $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{6}$ और $\frac{-9}{11}$ पर विचार कीजिए। गुणनफल ज्ञात करने के लिए आप शायद पहले $\frac{2}{3}$ और $\frac{5}{6}$ का गुणा करेंगे और फिर इनके गुणनफल को $\frac{-9}{11}$ से गुणा करेंगे। गुणनफल ज्ञात करने की इस विधि को निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\left(\frac{2}{3} \times \frac{5}{6}\right) \times \frac{-9}{11} = \left(\frac{2 \times 5}{3 \times 6}\right) \times \frac{-9}{11} = \frac{10}{18} \times \frac{-9}{11} = \frac{-90}{198}$$

आइए अब देखें कि यदि हम $\frac{2}{3}$ को $\frac{5}{6}$ और $\frac{-9}{11}$ के गुणनफल से गुणा करें तो हमें क्या प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, $\frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{6} \times \frac{-9}{11}\right)$ क्या है ? हम देखते हैं कि

$$\frac{2}{3} \times \left(\frac{5}{6} \times \frac{-9}{11}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{5 \times (-9)}{6 \times 11}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{-45}{66}\right) = \frac{-90}{198}$$

इस प्रकार,

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{5}{6}\right)\times\frac{-9}{11}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{5}{6}\times\frac{-9}{11}\right)$$

उपर्युक्त उदाहरण में परिमेय संख्याओं के गुणन का एक अन्य महत्वपूर्ण गुण कि परिमेय संख्याओं का गुणन सहचारी होता है, स्पष्ट होता है। पुनः यह नाम इतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह है यह याद रखना कि किन्हीं तीन परिमेय संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करने के लिए इससे कुछ अंतर नहीं पड़ता कि हम पहले कौन सी दो संख्याएँ लेकर गुणा करते हैं तथा फिर इनके गुणनफल को तीसरी बची हुई संख्या से गुणा करते हैं।

संकेतों का प्रयोग करके हम परिमेय संख्याओं के गुणन के साहचर्य गुण को निम्न प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\left(\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\right)\times\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\right)$$

उपर्युक्त गुण के फलस्वरूप ही प्रायः हम इन समान गुणनफलों के स्थान पर

$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}\left[\text{या}\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right)\left(\frac{e}{f}\right)\right]$ लिखते हैं।

हम देखते हैं कि $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=\frac{ace}{bdf}$ ।

आइए अब एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5 : $\frac{18}{-5}$, $\frac{-262}{131}$ और $\frac{125}{46}$ का गुणा कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{18}{-5}\times\left(\frac{-262}{131}\right)\times\frac{125}{46}=\frac{18\times(-262)\times125}{(-5)\times131\times46}$$

$$=\frac{9\times2\times(-2)\times131\times5\times25}{(-5)\times131\times23\times2}=\frac{9\times2\times25}{23}$$

$$=\frac{450}{23}$$

आइए, अब देखें कि चार या अधिक परिमेय संख्याओं का किस प्रकार गुणा किया जाता है। हम गुणन के क्रमविनिमेय तथा साहचर्य गुणों का, यदि आवश्यक हो तो संभवतया कई बार, प्रयोग करते हैं। इस स्तर पर यह आवश्यक नहीं कि हम प्रत्येक पग पर इन गुणों का प्रयोग बताते जाएँ। जो महत्वपूर्ण है वह है इस प्रयोग का परिणाम। परिणाम है कि **यदि कई परिमेय संख्याएँ दी हुई हों तो यह आवश्यक नहीं कि उन्हें उसी क्रम में गुणा किया जाए जिसमें वे दी हुई हैं। हम उनके किसी भी क्रम में समूह बना सकते हैं और उनका गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं।** इसे अब हम एक उदाहरण की सहायता से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 6: $\frac{5}{21}$, $\frac{-3}{40}$, -49, $\frac{16}{-25}$ और $\frac{1}{11}$ का गुणा कीजिए।

हल : $\frac{5}{21}\times\frac{-3}{40}\times(-49)\times\frac{16}{-25}\times\frac{1}{11}$

$$=\left[\left(\frac{5}{21}\times\frac{-3}{40}\right)\times(-49)\right]\times\left(\frac{16}{-25}\times\frac{1}{11}\right)$$

$$=\left[\left(\frac{-1}{7\times8}\right)\times(-49)\right]\times\left(\frac{16\times1}{-25\times11}\right)$$

$$=\left[-\frac{1}{8}\times(-7)\right]\times\frac{16}{-275}=\frac{7}{8}\times\frac{16}{-275}$$

$$=\frac{-14}{275}$$

हम केवल अंशों का गुणा करके उनके गुणनफल में हरों के गुणनफल का भाग देकर भी उपर्युक्त गुणनफल ज्ञात कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

[illegible] $\left(\frac{-49}{40}\right) \ldots \frac{16}{25} \times \frac{1}{11} = \frac{5}{21} \times \frac{3}{40} \times \frac{49}{25} \cdot \frac{16}{11} \ldots$

$$= \frac{-7}{25} \times \frac{2}{11} = \frac{-14}{275}$$

3.2 परिमेय संख्याओं के लिए वितरण गुण

अब हम एक और महत्वपूर्ण गुण पर विचार करते हैं। आपको याद होगा कि पूर्णांकों के समुच्चय में गुणन योग पर वितरणात्मक होता है। अतः, हम यह स्वाभाविक प्रश्न पूछते हैं कि 'क्या परिमेय संख्याओं के समुच्चय में गुणन योग पर वितरणात्मक है?' दूसरे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ तथा $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं तो क्या यह सत्य है कि

$$\frac{a}{b} \times \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f} \;?$$

आइए, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{2} \times \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5}\right]$ परिकलित करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2} \times \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5}\right] = \frac{1}{2} \times \left[\frac{4 \times 5 + 3 \times 3}{3 \times 5}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{29}{15} = \frac{29}{30}$$

साथ ही,

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{3} + \frac{3}{10}$$

$$= \frac{2 \times 10 + 3 \times 3}{3 \times 10} = \frac{29}{30}$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{2} \times \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{5}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{3}{5}$$

हम यह पाठक के अभ्यासार्थ छोड़ रहे हैं कि वह सिद्ध करे कि यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं, तो

$$\frac{a}{b} \times \left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$$

प्रश्नावली 3.1

1. गुणा कीजिए :

(i) 3 और $\frac{7}{16}$ (ii) -11 और $\frac{29}{30}$

(iii) -5 और $\frac{118}{-57}$ (iv) 0 और $\frac{2003}{3005}$

(v) $\frac{-1102}{801}$ और 0 (vi) $\frac{730}{111}$ और 1

(vii) -1 और $\frac{730}{111}$

2. गुणा कीजिए :

(i) $\frac{3}{7}$ और $\frac{-9}{11}$ (ii) $\frac{-19}{20}$ और $\frac{-5}{4}$

(iii) $\frac{1072}{571}$ और $\frac{-8}{-19}$ (iv) $\frac{5}{7}$ और $\frac{7}{5}$

(v) $\frac{5}{7}$ और $\frac{-7}{5}$ (vi) $\frac{3592}{101}$ और $\frac{99}{3609}$

(vii) $\frac{-5250}{175}$ और $\frac{-275}{110}$

(ii) $\frac{1}{7}\left[\frac{2}{3} + \frac{-8}{9}\right] = \frac{1}{7}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{7}\left(\frac{-8}{9}\right)$

*7. मान लीजिए $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हैं।

(i) $\frac{c}{d} + \frac{e}{f}$ ज्ञात कीजिए।

(ii) $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ परिकलित करने में (i) का प्रयोग कीजिए।

(iii) $\frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right)$ तथा $\frac{a}{b}\left(\frac{e}{f}\right)$ परिकलित कीजिए।

(iv) जाँच कीजिए कि :

$$\frac{a}{b}\left[\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right] = \frac{a}{b}\left(\frac{c}{d}\right) + \frac{a}{b}\left(\frac{e}{f}\right)$$

8. मान ज्ञात कीजिए :

$$\frac{8}{9}\left(\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\right) + \frac{13}{21} \cdot \frac{7}{-260}$$

9. एक स्कूल की कक्षा *VI* मे 24 विद्यार्थी हैं। कक्षा *VII* में विद्यार्थियों की संख्या कक्षा *VI* के विद्यार्थियों की संख्या की $\frac{5}{4}$ गुनी है। कक्षा *VII* में कितने विद्यार्थी हैं ?

10. एक किसान $\frac{15}{4}$ हेक्टेअर भूमि में गेहूँ उगाता है। यदि उसकी पैदावार $\frac{47}{2}$ क्विंटल प्रति हेक्टेअर है तो बताइए वह कितना गेहूँ पैदा करता है।

3.3 परिमेय संख्या का व्युत्क्रम

$\frac{6}{13} \cdot \frac{13}{6}$ क्या है ? $\frac{-118}{275} \cdot \frac{275}{-118}$ क्या है ?

$\frac{23}{1} \cdot \frac{1}{23}$ क्या है ?

हम देखते है कि प्रत्येक स्थिति में गुणनफल 1 है। जब दो संख्याओं का गुणनफल 1 होता है तो हम कहते हैं कि प्रत्येक संख्या दूसरी का व्युत्क्रम (reciprocal) या गुणनात्मक प्रतिलोम (multiplicative inverse) है।

$\frac{13}{6}$ का व्युत्क्रम $\frac{6}{13}$ है; $\frac{6}{13}$ का व्युत्क्रम $\frac{13}{6}$ है; $\frac{275}{-118}$ का व्युत्क्रम $\frac{-118}{275}$ है; $\frac{-118}{275}$ का व्युत्क्रम $\frac{275}{-118}$ है; $\frac{1}{23}$ का व्युत्क्रम 23 है, 23 का व्युत्क्रम $\frac{1}{23}$ है।

0 के अतिरिक्त प्रत्येक परिमेय संख्या का एक व्युत्क्रम होता है जो कि पुनः एक परिमेय संख्या ही होती है। हम किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम कैसे ज्ञात करें? दूसरे शब्दों में, यदि $\frac{a}{b}$ कोई परिमेय संख्या है तो एक अन्य ऐसी परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{p}{q}$ कैसे ज्ञात की जाए कि

$$\frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = 1 \text{ हो ?} \qquad (1)$$

आइए (1) के दोनों पक्षों को $\frac{b}{a}$ से गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} \times \frac{p}{q} = \frac{b}{a} \times 1$$

इस प्रकार, $$\frac{p}{q} = \frac{b}{a}$$

दूसरे शब्दों में, किसी परिमेय संख्या का व्युत्क्रम उस संख्या के अंश को हर में तथा हर को अंश से बदल देने पर प्राप्त होता है।

[हम कभी-कभी कहते हैं कि परिमेय संख्या का व्युत्क्रम ज्ञात करने के लिए हम संख्या को 'उल्टा' कर देते हैं।]

इस प्रकार, $\frac{-23}{24}$ का व्युत्क्रम $\frac{24}{-23}$ या $-\frac{24}{23}$ है; 72 का व्युत्क्रम $\frac{1}{72}$ है; इत्यादि।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्न में से प्रत्येक का व्युत्क्रम लिखिए :

   (i) $\frac{5}{7}$ (ii) $\frac{-5}{7}$ (iii) $\frac{11}{-12}$

   (iv) 1 (v) -1

2. निम्न संख्याओं को उनके व्युत्क्रमों से गुणा कीजिए :

   (i) $\frac{7}{9}$ (ii) 4 (iii) $\frac{-11}{13}$

   (iv) 1 (v) -1

3. $\frac{15}{17}$ को $\frac{-20}{3}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

4. $\frac{5}{6}$ और $\frac{-7}{8}$ के व्युत्क्रमों का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

3.4 परिमेय संख्याओं का विभाजन

अब हम सीखेंगे कि दो परिमेय संख्याओं का विभाजन किस प्रकार परिभाषित किया जाता है। आपको याद होगा कि विभाजन, गुणन का प्रतिलोम है। हम इसका परिमेय संख्याओं के विभाजन को परिभाषित करने के लिए अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करेंगे। उदाहरणार्थ, $\frac{3}{4}$ के $\frac{6}{13}$ से विभाजन पर

विचार कीजिए। हम पूछते हैं, " $\frac{3}{4}$ प्राप्त करने के लिए हम $\frac{6}{13}$ में किसका गुणा करें ?"

मान लीजिए हम संख्या $\frac{c}{d}$ से गुणा करते हैं।

तब, $$\frac{6}{13} \times \frac{c}{d} = \frac{3}{4} \qquad (1)$$

(1) के दोनों पक्षों को $\frac{13}{6}$ से गुणा करने पर,

$$\frac{13}{6} \times \frac{6}{13} \times \frac{c}{d} = \frac{13}{6} \times \frac{3}{4}$$

इस प्रकार, $\frac{c}{d} = \frac{3}{4} \times \frac{13}{6} = \frac{3}{4} \times \left(\frac{6}{13} \text{ का व्युत्क्रम}\right)$

अर्थात् $\frac{3}{4}$ को $\frac{6}{13}$ से विभाजित करने के लिए हम $\frac{3}{4}$ को $\frac{6}{13}$ के व्युत्क्रम से गुणा करते हैं। वास्तव में ठीक इसी प्रकार से हम परिमेय संख्याओं का विभाजन परिभाषित करेंगे। अर्थात्,

यदि $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ $\left(\frac{c}{d} \neq 0\right)$ परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{a}{b}$ को $\frac{c}{d}$ से विभाजित करने का अर्थ वही है जो $\frac{a}{b}$ को $\frac{d}{c}$ से गुणा करने का (अर्थात् $\frac{a}{b}$ को $\frac{c}{d}$ के व्युत्क्रम से गुणा करने का) है। हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} \text{।}$$

पूर्णांकों की तरह परिमेय संख्याओं में भी शून्य से विभाजन परिभाषित नहीं है।

अब हम इस परिभाषा का प्रयोग स्पष्ट करने के लिए एक या दो उदाहरणों पर विचार करते हैं।

उदाहरण 1 : $\frac{16}{21}$ को $\frac{-343}{40}$ से भाग दीजिए।

हल : $\frac{-343}{40}$ का व्युत्क्रम $\frac{-40}{343}$ है।

इस प्रकार, $\frac{16}{21} \div \frac{-343}{40} = \frac{16}{21} \times \frac{(-40)}{343} = \frac{-640}{7203}$

उदाहरण 2 : $\frac{-17}{24} \div \frac{51}{480}$ परिकलित कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{-17}{24} \div \frac{51}{480} = \frac{-17}{24} \times \frac{480}{51} = \frac{-17 \times 24 \times 20}{24 \times 17 \times 3} = \frac{-20}{3}$$

आपको याद होगा कि हमें परिमेय संख्याएँ प्रविष्ट करने की आवश्यकता इसलिए पड़ी क्योंकि हमने देखा कि हम एक पूर्णांक को सदैव एक (शून्येतर) पूर्णांक से विभाजित करने में समर्थ नहीं थे। अब हमारे पास परिमेय संख्याएँ हैं, इसलिए ऐसा करना सदैव संभव है। क्योंकि यदि a और b कोई पूर्णांक इस प्रकार हैं कि $b \neq 0$ है, तो

$$a \div b = \frac{a}{1} \div \frac{b}{1} = \frac{a}{1} \times \frac{1}{b} = \frac{a \times 1}{1 \times b} = \frac{a}{b}$$

इस प्रकार, यदि a और b पूर्णांक हैं तथा $b \neq 0$ है, तो $a \div b$ का अर्थ है परिमेय संख्या $\frac{a}{b}$। उदाहरणार्थ, $9 \div 4 = \frac{9}{4}$, $12 \div 7 = \frac{12}{7}$, इत्यादि।

प्रश्नावली 3.3

1 निम्न विभाजन कीजिए तथा तदनुरूपी गुणन से अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

(i) $\frac{3}{7} \div \frac{9}{11}$ (ii) $\frac{4}{9} \div \frac{9}{4}$

(iii) $\frac{11}{13} \div \frac{-5}{6}$ (iv) $\frac{2}{25} \div \frac{-2}{25}$

(v) $\frac{-7}{16} \div \frac{18}{-7}$ (vi) $114 \div \frac{38}{5}$

(vii) $\frac{24}{7} \div \frac{61}{8}$ (viii) $\frac{9261}{1035} \div \frac{-441}{207}$

(ix) $-306 \div \frac{103}{-4}$

2. दो उदाहरणों की सहायता से दिखाइए कि यदि $\frac{p}{q}$ और $\frac{r}{s}$ परिमेय संख्याएँ हैं, तो $\frac{p}{q} \div \frac{r}{s} \neq \frac{r}{s} \div \frac{p}{q}$ ।

3 परिकलित कीजिए :

(i) $\left(\frac{7}{3} \div \frac{10}{9}\right) \times \frac{5}{11}$ (ii) $\frac{-108}{27} \div \left(\frac{9}{11} \times \frac{18}{17}\right)$

(iii) $\frac{100}{-245} \div \left(\frac{125}{64} \div \frac{-45}{48}\right)$

(iv) $\left[\left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{7}\right) \div \frac{8}{21}\right] \times \frac{-3}{5}$

4. $\frac{3703}{1231}$ को दो संख्याओं के गुणा के रूप में व्यक्त कीजिए जबकि इनमें से एक संख्या $\frac{161}{11}$ हो ।

5. $\left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{2}$ ज्ञात कीजिए। साथ ही, $\frac{2}{5} - \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2}\right)$ भी ज्ञात कीजिए। क्या ये समान हैं ?

3.5 परिमेय संख्याओं में क्रम सम्बन्ध

हम देख चुके हैं कि परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है। हम यह कब कह सकते हैं कि एक परिमेय संख्या दूसरी परिमेय संख्या से छोटी (या बड़ी) है ? आपको याद होगा कि पूर्णांक 'a' (अर्थात् परिमेय संख्या $\frac{a}{1}$) पूर्णांक 'b' (अर्थात् परिमेय संख्या $\frac{b}{1}$) से बड़ा होता है यदि संख्या रेखा पर 'a', 'b' के दाईं ओर स्थित हो।

हम इसका परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध (ordering) परिभाषित करने में अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग करेंगे। हम कहते हैं कि एक परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{r}{s}$ से बड़ी होती है यदि संख्या रेखा पर $\frac{p}{q}$ (को निरूपित करने वाला बिंदु), $\frac{r}{s}$ (को निरूपित करने वाले बिंदु) के दाईं ओर स्थित हो। हम इसे $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ लिखते हैं। दूसरे शब्दों में, हमें यह भी कहा जा सकता है कि एक परिमेय संख्या $\frac{r}{s}$ दूसरी परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ से छोटी होती है यदि संख्या रेखा पर $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ के बाईं ओर स्थित हो। हम इसे $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ लिखते हैं।

अतः स्पष्ट है कि एक धनात्मक परिमेय संख्या एक ऋणात्मक परिमेय संख्या से सदैव बड़ी होती है। साथ ही, शून्य प्रत्येक ऋणात्मक परिमेय संख्या से बड़ा तथा प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या से छोटा होता है।

परन्तु परिमेय संख्याओं की तुलना करने के लिए हमें सदैव संख्या रेखा खीचने की ही आवश्यकता नही पड़नी चाहिए। अन्य किस प्रकार से हम परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते हैं ? मान लीजिए $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ है। तब संख्या रेखा पर $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ के दाईं ओर स्थित होगा। दूसरे शब्दों में, हमें $\frac{p}{q}$ पर 'पहुंचने' के लिए $\frac{r}{s}$ में कोई धनात्मक संख्या जोड़नी पड़ेगी। अतः ज्यामितीय निरूपण से हमें एक संकेत मिलता है। हम कहते हैं कि $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ होगा यदि $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ धनात्मक हो। परन्तु यदि $\frac{p}{q} - \frac{r}{s}$ ऋणात्मक हो तो हम कहते हैं कि $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ है।

अब हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1: परिमेय संख्याओं $\frac{2}{7}$ और $\frac{3}{11}$ में कौन सी संख्या बड़ी है ?

हल : हम देखते हैं कि $\frac{2}{7} - \frac{3}{11} = \frac{2 \times 11 - 7 \times 3}{7 \times 11} = \frac{1}{7 \times 11}$, जो धनात्मक है।

इस प्रकार, $\frac{2}{7} > \frac{3}{11}$

आइए इस पर एक दूसरे दृष्टिकोण से विचार करें।

हम देखते हैं कि $\frac{2}{7} = \frac{2 \times 11}{7 \times 11} = \frac{22}{77}$

तथा, $\frac{3}{11} = \frac{3 \times 7}{11 \times 7} = \frac{21}{77}$

$\frac{22}{77} > \frac{21}{77}$

हम यह भी देखते हैं कि दी हुई परिमेय संख्याओं के हर धनात्मक हैं। इस प्रकार यदि हम दी हुई संख्याओं को समान धनात्मक हरों वाली संख्याओं के

रूप में लिख सकें तो हमें केवल अंशों के क्रम-सम्बन्ध की ही जाँच करनी पड़ेगी। परिमेय संख्याओं में वह ही क्रम-सम्बन्ध होगा। चूंकि $22>21$ है, अतः $\frac{2}{7}>\frac{3}{11}$।

उदाहरण 2 : परिमेय संख्याओं $\frac{5}{-7}$ और $\frac{-2}{3}$ में कौन सी संख्या बड़ी है?

हल : हम जानते हैं कि $\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}$

इस प्रकार, $\frac{5}{-7}-\frac{(-2)}{3}=\frac{-5}{7}-\frac{(-2)}{3}=\frac{(-5)\times 3-(-2)\times 7}{7\times 3}$

$$=\frac{-1}{7\times 3}, \text{ जो ऋणात्मक है।}$$

इस प्रकार, $\frac{5}{-7}<\frac{-2}{3}$ अथवा $\frac{-2}{3}>\frac{5}{-7}$

पुन: आइए इस पर एक दूसरे दृष्टिकोण से विचार करें।

हम देखते हैं कि $\frac{5}{-7}=\frac{-5}{7}=\frac{(-5)\times 3}{7\times 3}=\frac{-15}{21}$

तथा $\frac{-2}{3}=\frac{(-2)\times 7}{3\times 7}=\frac{-14}{21}$

($\frac{-15}{21} < \frac{-14}{21}$)

चूंकि $-15<-14$ है, अतः $\frac{5}{-7}<\frac{-2}{3}$। इस प्रकार, यदि हम परिमेय संख्याओं को समान धनात्मक हरों वाली संख्याओं के रूप में लिख लें तो हमें वास्तव में घटाने की कोई आवश्यकता नहीं रहेगी। हम कहते हैं कि यदि $q>0$, $s>0$ तथा $ps>qr$ है तो $\frac{p}{q}>\frac{r}{s}$। परन्तु यदि $q>0$, $s>0$ तथा $ps<qr$ है तो हम कहते हैं कि $\frac{p}{q}<\frac{r}{s}$। पुनः आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : परिमेय संख्याओं $\frac{13}{12}$ और $\frac{17}{16}$ में कौन सी संख्या बड़ी है ?

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{13}{12} = \frac{13 \times 16}{12 \times 16} = \frac{208}{12 \times 16}$$

तथा,

$$\frac{17}{16} = \frac{17 \times 12}{16 \times 12} = \frac{204}{12 \times 16}$$

$208 > 204$

चूँकि $208 > 204$ है, अतः $\frac{13}{12} > \frac{17}{16}$ है।

उदाहरण 4 : $\frac{-7}{10}$, $\frac{5}{-8}$ और $\frac{2}{-3}$ को आरोही क्रम (increasing order) में लिखिए।

हल : हम देखते हैं कि $\frac{-7}{10} = \frac{(-7) \times 8 \times 3}{10 \times 8 \times 3} = \frac{-168}{10 \times 8 \times 3}$,

$$\frac{5}{-8} = \frac{-5}{8} = \frac{(-5) \times 10 \times 3}{8 \times 10 \times 3} = \frac{-150}{10 \times 8 \times 3},$$

तथा

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = \frac{(-2) \times 10 \times 8}{3 \times 10 \times 8} = \frac{-160}{10 \times 8 \times 3}$$ ।

अब हम केवल अंशों को आरोही क्रम में लिखते हैं तथा परिमेय संख्याओं का यही क्रम होगा। अंशों को आरोही क्रम में लिखने पर,

$$-168 < -160 < -150$$

इस प्रकार, $\frac{-7}{10} < \frac{2}{-3} < \frac{5}{-8}$

3.6 निरपेक्ष मान

पूर्णांकों की तरह किसी परिमेय का निरपेक्ष मान (absolute value) उसके चिन्ह को छोड़ते हुए वह संख्या ही होता है। संख्या का निरपेक्ष मान

दर्शाने के लिए हम उस संख्या को दो ऊर्ध्वाधर अर्थात् खड़ी रेखाओं '| |' के बीच में लिखते हैं।

इस प्रकार, $\left|\frac{13}{25}\right| = \frac{13}{25}$, $\left|\frac{-6}{217}\right| = \frac{6}{217}$, $\left|\frac{18}{-47}\right| = \frac{18}{47}$, इत्यादि।

चूँकि परिमेय संख्या 0 न तो धनात्मक है और न ही ऋणात्मक, अतः हम कहते हैं कि शून्य का निरपेक्ष मान शून्य है। हम इसे $|0| = 0$ लिखते हैं।

प्रश्नावली 3.4

1. निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्याओं के युग्म में निर्धारित कीजिए कि कौन-सी संख्या बड़ी है :

   (i) $\frac{-5}{8}, \frac{3}{11}$ (ii) $\frac{-5}{8}, \frac{-2}{3}$

   (iii) $\frac{7}{25}, \frac{-5}{7}$ (iv) $0, \frac{-2}{3}$

   (v) $\frac{120}{110}, \frac{121}{111}$ (vi) $\frac{-7}{6}, \frac{-8}{7}$

2. निम्न को अवरोही क्रम (decreasing order) में लिखिए :

   $\frac{-10}{9}, \frac{-8}{7}, \frac{8}{-3}, \frac{5}{2}, \frac{11}{10}$

3. निम्न को आरोही-क्रम (increasing order) में लिखिए :

   $\frac{5}{7}, \frac{-5}{4}, \frac{8}{11}, \frac{-7}{6}, \frac{9}{-5}, \frac{-6}{5}$

4. निम्न में से प्रत्येक के निरपेक्ष मान लिखिए :

   $\frac{18}{39}, \frac{-233}{457}, \frac{131}{-202}, 0, \frac{-162}{961}$

3.7 परिमेय संख्याओं का एक महत्वपूर्ण गुण

आपको याद होगा कि धनपूर्णांकों 1, 2, 3, 4,...में एक बहुत ही 'सुन्दर' गुण कि प्रत्येक धनपूर्णांक का एक आसन्न परवर्ती (immediate successor) होता है विद्यमान है। पूर्णांकों में भी यह 'सुन्दर' गुण विद्यमान है। दूसरे शब्दों में, यदि कोई पूर्णांक, उदाहरणार्थ, —23 दिया हो तो हम जानते हैं कि —22 इसका आसन्न परवर्ती है। परिमेय संख्याओं के बारे में आप क्या सोचते हैं? यदि एक परिमेय संख्या दी हुई हो तो क्या हम उसका आसन्न परवर्ती बता सकते हैं? हम देखेंगे कि इस प्रश्न का उत्तर है: नहीं! हम यह दिखाएँगे कि यदि हम दो परिमेय संख्याएँ लें चाहे वे परस्पर कितनी ही निकट हों हम उनके बीच में सदैव एक परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, संख्याओं $\frac{3}{5}$ और $\frac{2}{9}$ को लीजिए। हम देखते हैं कि $\frac{3}{5} > \frac{2}{9}$ है। (क्यों?)

अब आइए इन दोनों संख्याओं का औसत* (average) ज्ञात करें। हमें $\frac{\frac{3}{5}+\frac{2}{9}}{2}$ अर्थात् $\frac{37}{90}$ औसत के रूप में प्राप्त होता है। हम दिखायेंगे कि $\frac{37}{90}$, $\frac{2}{9}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच में स्थित है। दूसरे शब्दों में, हम यह दिखाएँगे कि $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ तथा $\frac{37}{90} < \frac{3}{5}$ है।

क्या $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ है? हाँ, क्योंकि $2 \times 90 < 9 \times 37$ है।

---

*दो संख्याओं a और b का औसत उनके योग का आधा अर्थात् $\frac{a+b}{2}$ होता है।

इस प्रकार, $\frac{2}{9} < \frac{37}{90}$ ।

इसी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि $\frac{37}{90} < \frac{3}{5}$ ।

इस प्रकार हमने $\frac{2}{9}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच में एक संख्या $\frac{37}{90}$ ज्ञात कर ली। हम इस औसत की विधि का ही प्रयोग करके $\frac{2}{9}$ और $\frac{37}{90}$ के बीच एक परिमेय संख्या तथा $\frac{37}{90}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं। वास्तव में इस प्रक्रिया का कोई अंत ही नहीं है। अतः हमें परिमेय संख्याओं का एक बहुत ही महत्वपूर्ण गुण प्राप्त होता है जो निम्न है :

दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सर्वव एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

[इस स्वीकृत कथन की उपपत्ति (proof) परिशिष्ट I में दी गई है।]

इस प्रकार हम आसन्न परवर्ती के अर्थ में शब्द 'अगली' परिमेय संख्या की कल्पना भी नहीं कर सकते।

प्रश्नावली 3.5

1. $\frac{5}{12}$ और $\frac{3}{7}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
2. $\frac{2}{9}$ और $\frac{37}{90}$ के बीच एक परिमेय संख्या तथा $\frac{37}{90}$ और $\frac{3}{5}$ के बीच एक परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।
3. $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{4}$ के बीच कोई पाँच परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

4 क्या 8, $\frac{32}{3}$ और $\frac{32}{5}$ के बीच स्थित है ?

मुख्य संकल्पनाएँ

गुणन	निरपेक्ष मान
परिमेय संख्या का व्युत्क्रम (या गुणनात्मक प्रतिलोम)	किन्हीं दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सर्वदा एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं
विभाजन	
परिमेय संख्याओं में क्रम-सम्बन्ध	

विविध प्रश्नावली I

(एकक I, II और III पर)

1. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ?
   (*i*) 7 एक परिमेय संख्या है।
   (*ii*) $\frac{12}{16}$ एक ऋणपूर्णांक है।
   (*iii*) प्रत्येक पूर्णांक एक परिमेय संख्या है।
   (*iv*) प्रत्येक परिमेय संख्या एक पूर्णांक है।
   (*v*) 0 एक परिमेय संख्या है।
   (*vi*) 0 एक पूर्णांक है।
   (*vii*) दो परिमेय संख्याओं का योग सदैव एक परिमेय संख्या होता है।
   (*viii*) $\frac{0}{1}$ का व्युत्क्रम $\frac{1}{0}$ है।
   (*ix*) दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल सदैव एक परिमेय संख्या होता है।
2. परिमेय संख्या $\frac{297}{-316}$ के अंश और हर का अन्तर ज्ञात कीजिए।
3. निम्न परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित कीजिए :
   (*i*) $\frac{9}{5}$ (*ii*) $\frac{-7}{3}$
4. निम्न में से प्रत्येक को निम्नतम पदों में व्यक्त कीजिए :
   (*i*) $\frac{2457}{1170}$ (*ii*) $\frac{3645}{5508}$
   (*iii*) $\frac{-10648}{3872}$ (*iv*) $\frac{17576}{-4394}$

5. परिमेय संख्याओं के निम्न युग्मों का योग ज्ञात करने के लिए संख्या रेखा का प्रयोग कीजिए :

(i) $\frac{5}{6}, \frac{13}{6}$ (ii) $\frac{5}{6}, \frac{-13}{6}$

(iii) $\frac{-5}{6}, \frac{13}{6}$ (iv) $\frac{-5}{6}, \frac{-13}{6}$

6. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{11}{13}, \frac{13}{11}$ (ii) $\frac{129}{10}, \frac{-17}{20}$

(iii) $\frac{-125}{30}, \frac{150}{35}$ (iv) $\frac{3}{100}, \frac{-5}{200}, \frac{7}{300}$

(v) $9, \frac{11}{17}, \frac{12}{5}$ (vi) $\frac{23}{9}, \frac{-15}{20}, \frac{1}{90}, \frac{-2}{180}$

7. परिकलित कीजिए :

(i) $\frac{15}{11} + \frac{5}{11} - \frac{6}{11}$

(ii) $\frac{-6813}{90} + \frac{105}{21} + \frac{3}{10} - \frac{1}{5}$

(iii) $\frac{7}{16} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right)$

(iv) $\frac{5}{3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5} + \frac{5}{7}\right)$

(v) $\left(\frac{5}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{5} + \frac{5}{7}$

(vi) $\frac{25}{42}\left(\frac{13}{39} \div \frac{18}{6}\right)\left[\frac{324}{405}\left(\frac{576}{144}+\frac{22}{-330}\right)\right]$

8. घटाइए :

(i) $\frac{6}{19}$ में से $\frac{18}{5}$ (ii) -3 में से $\frac{512}{128}$

(iii) $\frac{87}{174}$ में से $\frac{-4662}{6660}$

9. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{10}{3}$ है। यदि इनमें से एक $\frac{-1}{3}$ है, तो दूसरी ज्ञात कीजिए।

10. दो परिमेय संख्याओं का योग $\frac{21}{43}$ है। यदि इनमें से एक $\frac{-11}{129}$ है, तो दूसरी ज्ञात कीजिए।

11. निम्न को गुणा कीजिए :

(i) $\frac{-5}{8}$ और $\frac{64}{25}$ (ii) $\frac{18}{5}$ और $\frac{16}{19}$

(iii) $\frac{23}{7}$ और $\frac{-25}{7}$ (iv) $\frac{-7392}{27}$ और $\frac{5005}{-9009}$

(v) $\frac{67851}{105}$, $\frac{21}{105}$ और 63 (vi) $\frac{7308}{126}$, 0, $\frac{12609}{7308}$ और $\frac{252}{121}$

12. निम्न में से प्रत्येक के पक्ष में दो उदाहरण दीजिए :

(i) दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का गुणनफल एक धनात्मक परिमेय संख्या होती है।

(ii) एक धनात्मक और एक ऋणात्मक परिमेय संख्या का गुणनफल एक ऋणात्मक परिमेय संख्या होती है।

(*iii*) यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ कोई तीन परिमेय संख्याएँ हों, तो

$$\frac{a}{b}\times\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}-\frac{a}{b}\times\frac{e}{f}$$

13 दो परिमेय संख्याओं का गुणनफल $\frac{121}{49}$ है तथा इनमें से एक संख्या $\frac{13915}{637}$ है। दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

14 निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

(*i*) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\div\frac{5}{7}$ (*ii*) $\left[\frac{12}{13}+\left(\frac{7}{9}-\frac{28}{117}\right)\right]\div\frac{57}{13}$

(*iii*) $\frac{16}{5}\times\frac{24}{13}-\frac{16}{5}\times\frac{11}{13}$ (*iv*) $\left[\left(\frac{6}{7}\times\frac{21}{23}\right)-\frac{35}{161}\right]\div\frac{101}{161}$

(*v*) $\left[\frac{25}{24}-\left(\frac{5}{8}\times\frac{5}{3}\right)\right]\times\frac{11913}{-27054}$

15 $\frac{217}{192}$ को $\frac{-31}{48}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

16. $\frac{-35}{24}$ और $\frac{17}{-13}$ के गुणनफल को $\frac{85}{156}$ के व्युत्क्रम से गुणा कीजिए।

17. निम्न विभाजन कीजिए और तदनुरूपी गुणन की सहायता से अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

(*i*) $\frac{17}{21}\div\frac{7}{204}$ (*ii*) $\frac{23}{75}\div\frac{92}{-25}$

(*iii*) $\frac{-13013}{11}\div 13$ (*iv*) $\frac{-102}{230}\div\frac{51}{-23}$

(*v*) $-1170\div\frac{26}{750}$

18 निम्न परिमेय संख्याओं के युग्मों में से प्रत्येक युग्म में ज्ञात कीजिए कि कौन-सी संख्या छोटी है

(i) $\frac{7}{8}, \frac{8}{9}$ (ii) $\frac{19}{20}, \frac{20}{21}$

(iii) $\frac{15}{16}, \frac{14}{15}$ (iv) $\frac{-117}{108}, \frac{-126}{125}$

19 रिक्त स्थान पर उपयुक्त संकेत '<' या '>' या '=' भरिए ताकि निम्न में से प्रत्येक कथन सत्य हो :

(i) $\frac{9}{10} \ldots \frac{7}{8}$ (ii) $\frac{7}{16} \ldots \frac{5}{11}$

(iii) $\frac{5}{13} \ldots \frac{3}{7}$ (iv) $\frac{-7}{13} \ldots \frac{21}{-39}$

20. निम्न को आरोही-क्रम में लिखिए :

$-\frac{5}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{10}, \frac{-7}{4}$

21 निम्न को अवरोही-क्रम में लिखिए :

$3, \frac{25}{6}, \frac{7}{18}, \frac{5}{2}, \frac{17}{4}, \frac{-17}{33}, \frac{-28}{44}$

22. निम्न में से प्रत्येक का निरपेक्ष मान लिखिए :

$\frac{19}{11}, \frac{-19}{11}, \frac{19}{-11}, -\frac{19}{11}$

23. − 5 और 5 के बीच में कितने पूर्णांक हैं ?

24 5 और 5 के बीच में कितनी परिमेय संख्याएँ हैं ? ऐसी कोई तीन परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

25 $-\frac{21}{23}$ और 0 के बीच में कोई दो परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए ।

26 निम्न कथन के पक्ष में दो उदाहरण दीजिए :

"यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ तीन परिमेय संख्याएँ हैं तथा $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ और $\frac{c}{d} > \frac{e}{f}$, तो $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$ ।"

27. q के पूर्णांक मान (integer values) ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{3}{q}$ एक धन-पूर्णांक हो ।

28. s के पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए ताकि $\frac{3}{s}$ एक पूर्णांक हो ।

दशमलवों का अंकगणित

यह एक पुनरावलोकन एकक है। यह कल्पना की गई है कि आप दशमलवों (decimals) के अंकगणित से पहले से ही परिचित हैं। हम नीचे पुनरावलोकन हेतु एक प्रश्नावली दे रहे हैं जिससे उपर्युक्त संदर्भ में जो कुछ आपने पढ़ा है आप उसका स्मरण कर सकें। यदि आप किसी भी संकल्पना में कठिनाई अनुभव करते हैं तो आप अपनी पिछली कक्षाओं में अध्ययन की गई पाठ्य-सामग्री को पढ़ें।

प्रश्नावली 4.1

1. स्थानीय मान (place value) का सिद्धांत बहुत सुन्दरता के साथ दशमलवों के लिए भी लागू किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, 302.23 को प्रसारित संकेतन (expanded notation) में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$302.23 = 3 \times 10^2 + 0 \times 10 + 2 \times 1 + 2 \times \frac{1}{10} + 3 \times \frac{1}{10^2}$$

निम्न दशमलवों को प्रसारित संकेतन में लिखिए :

(*i*) 3.5	(*ii*) 28.37
(*iii*) 215.532	(*iv*) 1501.013
(*v*) 2395.22037	(*vi*) 999.99190

2. निम्न में से प्रत्येक दशमलव को एक भिन्न के रूप में लिखिए

   (*i*) 71.2 (*ii*) 19.08

   (*iii*) 113.004 (*iv*) 0.0037

   (*v*) 978.0352

3. निम्न दशमलवों को आरोही-क्रम में लिखिए :

   (*i*) 19.3, 18.892, 19.05, 18.8922

   (*ii*) 0.09, 0.1, 0.099, 1.001, 0.937

   (*iii*) 5.2, 5.02, 5.002, 5.19, 5.119, 5.219

4. निम्न दशमलवों को अवरोही-क्रम में लिखिए :

   (*i*) 0.01, 1.01, 0.10, 0.001, 1.001

   (*ii*) 1103.01, 999.099, 1103.001, 110.3001

   (*iii*) 23.925, 22.9925, 23.9249, 23.92249, 23.9255

5. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

   (*i*) 2.35, 7.328 (*ii*) 11.19, 3, 2.684

   (*iii*) 91.825, 101.025, 233.1346, 16.83572, 21

   (*iv*) 201.351, 3.8, 0.40511, 91.52, 12359.2

   (*v*) 1301.372, 2705.92301, 525.001, 3792.5002, 1621,340, 0.00038

6. निम्न संक्रियाएँ कीजिए :

   (*i*) $0.0573 + 0.7237 + 5.7324 - 6.81$

   (*ii*) $0.03297 - 4.7249$

   (*iii*) $-19.152 - 29.3 + 108 - 314.2468$

   (*iv*) $0.7291 - 0.5219 + 7.3216 - 237.253 + 0.00001$

   (*v*) $23.017 - 19.9312 + 307.8 - 14 + 0.200004$

7. निम्न भिन्नों को दशमलवों में बदलिए :

(i) $\frac{3}{4}$ (ii) $\frac{43}{5}$

(iii) $\frac{123}{20}$ (iv) $\frac{405}{8}$

(v) $\frac{1}{10}$ (vi) $\frac{1}{100}$

(vii) $\frac{1}{200}$ (viii) $\frac{3501}{4}$

8. निम्न में से प्रत्येक का गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) 4 और 3.2 (ii) − 5 और 7.03

(iii) 21.01 और 0.24 (iv) 4.75 और 20

(v) 0.8193, 1200 और 6.852

(vi) 7.5, 30.25, 125.25 और 10

(vii) 0.687, 0.0032, 0.000345 और 4

9. 10 या 10 की घातों से दशमलवों के गुणन का नियम बताइए।

10. भाग कीजिए :

(i) 18.04 को 4 से (ii) 9.0375 को 0.25 से

(iii) 380.019 को 0.19 से (iv) 0.125 को 25 से

(v) 22.05 को 0.00021 से (vi) 4.6728 को 0.0032 से

(vii) 2072.616 को 284.7 से

11. 10 या 10 की घातों से दशमलवों के विभाजन का नियम बताइए।

12. निम्न संक्रियाएँ कीजिए। [याद कीजिए कि संक्रियाएँ किस क्रम में की जाती हैं।]

(i) $24596 \div 1000$ (ii) 0.024596×1000

(*iii*) $2459.6 \div 100$ (*iv*) 2.4596×100

(*v*) $3.15[5.34 + 2(3.76 - 1.08)]$

(*vi*) $7[6.725 - 2.308 + 3.11(1.8 - 3.12)]$

(*vii*) $0.01[(9.04 - 11.2) \div 0.54 + 2.53(17.3 - 6.6)]$

(*viii*) $15.2 + 0.08[81.83 - 6.5(52.3 - 28.2)]$

(*ix*) $15.75[12.37 - 8(-16.160 - 2.25) + 22.8]$

(*x*) $3.8 - (16.5 - 0.08) - [15.5 - (24.82 - 18.7) + 24 \div 0.5]$

13. यदि $23446 \div 19 = 1234$ हो, तो $23.446 \div 19$ का क्या मान होगा ?

14. निम्न संक्रियाएँ करने में लम्बी विभाजन (**long division**) विधि का प्रयोग कीजिए। अपना उत्तर 3 दशमलव स्थानों तक दीजिए।

(*i*) $293.7 \div 0.07$ (*ii*) $75.25 \div 8$

(*iii*) $335.456 \div 95.32$ (*iv*) $5743.64 \div 0.976$

15. सुन्दर के पास एक 10 रु० का नोट है। वह 2.90 रु० में एक सिनेमा का टिकट तथा 0.95 रु० में एक आइसक्रीम खरीदता है। उसके पास कितनी धन-राशि शेष रह जाएगी ?

16. एक टॉफियों के डिब्बे का कुल भार 1 किलोग्राम है। टॉफियों का शुद्ध भार 895 ग्राम है। डिब्बे का भार कितना है ?

17. ममता 90 पैसे प्रति किलोग्राम की दर से 3.5 किलोग्राम आलू तथा 1.30 रु० प्रति किलोग्राम की दर से 1.5 किलोग्राम प्याज खरीदती है। वह कुल कितनी धन-राशि व्यय करती है ?

18. एक कार 3.75 घण्टों में 165 किलोमीटर चलती है। 1 घण्टे में वह कितने किलोमीटर चलती है ? (कल्पना कीजिए कि कार समान गति से चल रही है।)

19 विनय की वार्षिक आय 6963.60 रु० है। उसकी मासिक आय निर्धारित कीजिए।

20 महेन्द्र एक 140 वर्ग मीटर का प्लाट 10136 रु० में खरीदता है। प्रति वर्ग-मीटर दर ज्ञात कीजिए।

21. गेहूँ की 16 बोरियों का भार 16.80 क्विंटल है। प्रत्येक बोरी का भार ज्ञात कीजिए। (कल्पना कीजिए कि प्रत्येक बोरी में गेहूँ का भार समान है।) पाँच बोरियों का भी भार ज्ञात कीजिए।

22. एक दौड़ने वाला पहले सेकेन्ड में 12 मीटर की दूरी तय करता है। फिर वह आने वाले प्रत्येक सेकेन्ड में अपने से पहले सेकेन्ड में तय की गई दूरी का $\frac{3}{4}$ भाग तय करता है। वह पहले 4 सेकेन्ड में कितना दौड़ लेता है? (अपना उत्तर दशमलव के 2 स्थानों तक दीजिए।)

एकक V

परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

इस एकक में हम यह सीखेंगे कि किसी परिमेय संख्या को किस प्रकार एक सांत (terminating) अथवा असांत आवर्ती (non-terminating repeating) दशमलव के रूप में निरूपित किया जाता है। हम यह ज्ञात करने के नियम का अध्ययन करेंगे कि किसी दी हुई परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत होगा अथवा असांत आवर्ती। लम्बी विभाजन विधि के 'क्यों' अर्थात् उसके औचित्य को स्पष्ट किया गया है। अंत में, किसी परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण प्राप्त करने के लिए संख्या रेखा का प्रयोग किया गया है।

5.1 धनात्मक परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

निश्चय ही आप जानते हैं कि किस प्रकार परिमेय संख्याओं जैसे कि $\frac{1}{4}, \frac{11}{8}, \frac{27}{10}, \frac{3286}{128}$ को दशमलवों के रूप में व्यक्त किया जाता है। इनमें से के लिए आप अंश का हर से मस्तिष्क में ही विभाजन (mental division) लेते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{11}{8} = 1.375$$

$$\frac{27}{10} = 2.7$$

अन्य संख्याओं के लिए आप लम्बी विभाजन (long division) विधि का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$\frac{3286}{128} = \frac{1643}{64} = 25.671875$$

```
      25.671875
64)1643.000000
   128
    363
    320
     430
     384
      460
      448
       120
        64
        560
        512
         480
         448
          320
          320
            ×
```

इन दशमलवों में से प्रत्येक अपनी तदनुरूपी परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण है। साथ ही, इनके दशमलवांश का कहीं पर अंत (termination या end) भी होता है। अतः हम इन्हें सांत दशमलव (terminating decimal) कहते हैं।

आइए अब परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{3}$ के दशमलव निरूपण पर विचार करें। हम देखते हैं कि यदि हम 1 को 3 से विभाजित करें तो हमें दशमलव बिंदु (decimal point) प्राप्त होता है तथा हमें लगातार भागफल में अंक 3 प्राप्त होता रहता है। इस प्रक्रिया का कभी अंत नहीं होता। हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots$$

$$\begin{array}{r} 0.33333\ldots \\ 3\overline{)\ 1.0} \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 10 \\ 9 \\ \hline 1 \end{array}$$

तीन बिन्दुओं (dots) का यह अर्थ है कि 3 लिखने की प्रक्रिया का कोई अंत नहीं है। अतः हम इस प्रकार के दशमलव को असांत (non-terminating) दशमलव कहते हैं। हम यह भी देखते हैं कि अंक 3 बार-बार आता है, अर्थात् अंक 3 की पुनरावृत्ति होती है। अतः हम ऐसे दशमलव को असांत आवर्ती (non-terminating repeating या non-terminating recurring) दशमलव कहते हैं। प्रायः हम पुनरावृत्ति वाले भाग के ऊपर एक रेखा लगा देते हैं और निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{3} = 0.33333\ldots = 0.\overline{3}$$

आइए एक अन्य परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{24}{7}$ के दशमलव निरूपण पर विचार करें। हम 24 को 7 से भाग देते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{24}{7} = 3.428571428571428571\ldots$$

हम पुनः देखते हैं कि निरूपण एक असांत आवर्ती दशमलव है। इस स्थिति में हम देखते हैं कि छः अंकों 4, 2, 8, 5, 7 और 1 का समूह बार-बार आता है। अतः हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{24}{7} = 3.\overline{428571}$$

वास्तव में यह सिद्ध किया जा सकता है कि प्रत्येक धनात्मक परिमेय संख्या या तो एक सांत दशमलव या एक असांत आवर्ती दशमलव के रूप में व्यक्त की जा सकती है। वस्तुतः यह परिणाम प्रत्येक परिमेय संख्या, चाहे वह धनात्मक हो अथवा ऋणात्मक, के लिए सत्य है। [इस परिणाम की उपपत्ति हमारी इस पुस्तक की सीमा के बाहर है। हम केवल इसको सत्य मान लेंगे।]

प्रश्नावली 5.1

1. निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण दीजिए। बताइए कि निरूपण एक सांत दशमलव है या असांत आवर्ती दशमलव।

(i) $\frac{1}{5}$ (ii) $\frac{6}{25}$

(iii) $\frac{5}{6}$ (iv) $\frac{13}{20}$

(v) $\frac{411}{160}$ (vi) $\frac{1108}{32}$

(vii) $\frac{131}{25}$ (viii) $\frac{213}{20}$

(ix) $\frac{711}{11}$ (x) $\frac{525}{13}$

(xi) $\frac{5}{7}$ (xii) $\frac{7}{9}$

2 दिखाइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण सांत हैं :

(*i*) $\frac{2}{5}$ (*ii*) $\frac{13}{4}$

(*iii*) $\frac{3}{8}$ (*iv*) $\frac{401}{25}$

(*v*) $\frac{129}{64}$

3. दिखाइए कि निम्न परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण असांत हैं :

(*i*) $\frac{14}{9}$ (*ii*) $\frac{7}{15}$

(*iii*) $\frac{11}{48}$ (*iv*) $\frac{1}{11}$

(*v*) $\frac{22}{7}$

*5.2 लम्बी विभाजन विधि का 'क्यों'

कोई विभाजन करते समय क्या आपने जो आप कर रहे हैं उसके 'क्यों' के बारे में कभी विचार किया है ? उदाहरणार्थ, 1 को 4 से विभाजित करने में आप 1 के आगे शून्य और भागफल में दशमलव बिन्दु क्यों लगा देते हैं ? तब आप क्यों 10 को 4 से विभाजित करते हैं और 2 को भागफल में अगले अंक के रूप में तथा 2 शेषफल के रूप में लिखते हैं ? पुनः आप शेषफल '2' के आगे शून्य क्यों लगाते हैं और क्यों यही प्रक्रिया दोहराते रहते हैं ? आप जो कुछ करते हैं वह क्यों करते हैं ? आइए देखें कि हम इन 'क्यों' के उत्तर ज्ञात कर सकते हैं या नहीं ।

परिमेय संख्या $\frac{1}{4}$ लीजिए। हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{4}=\frac{10}{4}\times\frac{1}{10} \qquad (1)$$

अब हम 10 को 4 से विभाजित कर सकते हैं। हमने इसे $\frac{10}{4}\times\frac{1}{10}$ ही क्यों लिखा और उदाहरणार्थ, $\frac{11}{4}\times\frac{1}{11}$ या $\frac{15}{4}\times\frac{1}{15}$ क्यों नहीं लिखा ? यह इसलिए कि हम अंकन की 10 आधार वाली पद्धति (base-10 system of numeration) में कार्य कर रहे हैं। इस प्रकार (1) को निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{4}=\left(2+\frac{2}{4}\right)\times\frac{1}{10}$$

```
     .25
4)  1.0
     8
    ---
     2
     |
    20
    20
    ---
     ×
```

अर्थात्, $$\frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{1}{20} \qquad (2)$$

अब हम लिखते हैं कि :

$$\frac{1}{20}=\frac{100}{20}\times\frac{1}{10^2} \quad \text{(क्यों ?)}$$

अर्थात्, $$\frac{1}{20}=5\times\frac{1}{10^2}$$

अतः, (2) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{5}{10^2} \qquad (3)$$

स्थानीय मान के सिद्धांत (place-value principle) का प्रयोग करते हुए हम (3) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{4}=.25$$

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : 1 को 8 से विभाजित कीजिए और अपना उत्तर दशमलव के रूप में दीजिए।

हल : हम निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{8}=\frac{10}{8}\times\frac{1}{10}$$

$$=\left(1+\frac{2}{8}\right)\times\frac{1}{10}$$

अर्थात्, $$\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{1}{40} \qquad (1)$$

अब, $$\frac{1}{40}=\frac{100}{40}\times\frac{1}{10^2}$$

$$=\left(2+\frac{20}{40}\right)\times\frac{1}{10^2}$$

अर्थात्, $$\frac{1}{40}=\frac{2}{10^2}+\frac{1}{200}$$

अतः (1) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{1}{200} \qquad (2)$$

अब, $$\frac{1}{200}=\frac{1000}{200}\times\frac{1}{10^3}$$

$$=5\times\frac{1}{10^3}$$

अर्थात्, $$\frac{1}{200}=\frac{5}{10^3}$$

अतः (2) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{8}=\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{5}{10^3} \qquad (3)$$

```
     125
8) 10
    8
    2
   20
   16
    4
   40
   40
    0
```

स्थानीय मान के सिद्धान्त का प्रयोग कर हम (3) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{8} = .125$$

उदाहरण 2 : $\frac{577}{500}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि

$$\frac{577}{500} = 1 + \frac{77}{500} \qquad (1)$$

अब, $\frac{77}{500} = \frac{770}{500} \times \frac{1}{10}$

$$= \left(1 + \frac{270}{500}\right) \times \frac{1}{10}$$

अर्थात्, $\frac{77}{500} = \frac{1}{10} + \frac{27}{500}$ (2)

साथ ही, $\frac{27}{500} = \frac{2700}{500} \times \frac{1}{10^2}$

$$= \left(5 + \frac{200}{500}\right) \times \frac{1}{10^2}$$

अर्थात्, $\frac{27}{500} = \frac{5}{10^2} + \frac{2}{500}$ (3)

अब, $\frac{2}{500} = \frac{2000}{500} \times \frac{1}{10^3} = \frac{4}{10^3}$ (4)

```
        1.154
500) 577
     500
      77
      770
      500
      270
      2700
      2500
       200
      2000
      2000
      ----
```

[illegible]

$$\frac{27}{500} = \frac{5}{10} + \frac{4}{10^2} \qquad (5)$$

(5) को (4) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{77}{500} = \frac{1}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} \qquad (6)$$

(6) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर,

$$\frac{577}{500} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{5}{10^2} + \frac{4}{10^3} \qquad (7)$$

स्थानीय मान के सिद्धान्त का प्रयोग कर हम (7) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{577}{500} = 1.154$$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि 'प्रक्रिया' कुछ (परिमित संख्या के) चरणों (steps) के बाद समाप्त हो जाती है। हम कहते हैं कि इन संख्याओं के **दशमलव निरूपण सांत** हैं।

आइए अब एक ऐसे उदाहरण पर विचार करें जहाँ प्रक्रिया समाप्त नहीं होती।

उदाहरण 3 : $\frac{1}{14}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{14} = \frac{10}{14} \times \frac{1}{10}$$

$$= \frac{100}{14} \times \frac{1}{10^2} \text{ (क्यों ?)}$$

$$= \left(7 + \frac{2}{14}\right) \times \frac{1}{10^2}$$

अर्थात्, $\frac{1}{14} = \frac{7}{10^2} + \frac{1}{700}$ (1)

अब, $\frac{1}{700} = \frac{1000}{700} \times \frac{1}{10^3}$

$$= \left(1 + \frac{3}{7}\right) \times \frac{1}{10^3}$$

अर्थात्, $\frac{1}{700} = \frac{1}{10^3} + \frac{3}{7000}$ (2)

अब, $\frac{3}{7000} = \frac{30000}{7000} \times \frac{1}{10^4}$

$$= \left(4 + \frac{2}{7}\right) \times \frac{1}{10^4}$$

अर्थात्, $\frac{3}{7000} = \frac{4}{10^4} + \frac{2}{70000}$ (3)

अब, $\frac{2}{70000} = \frac{200000}{70000} \times \frac{1}{10^5}$

$$= \left(2 + \frac{6}{7}\right) \times \frac{1}{10^5}$$

अर्थात्, $\frac{2}{70000} = \frac{2}{10^5} + \frac{6}{700000}$ (4)

```
      07142857..
 14)1.00
     98
      2
     20
     14
      6
     60
     56
      4
     40
     28
     12
    120
    112
      8
     80
     70
     10
    100
     98
      2
```

(अंक दोहराने प्रारंभ हो जाएँगे ।)

अब, $\dfrac{6}{700000} = \dfrac{6000000}{700000} \times \dfrac{1}{10^6}$

$$= \left(8 + \frac{4}{7}\right) \times \frac{1}{10^6}$$

अर्थात्, $\dfrac{6}{700000} = \dfrac{8}{10^6} + \dfrac{4}{7000000}$ (5)

अब, $\dfrac{4}{7000000} = \dfrac{40000000}{7000000} \times \dfrac{1}{10^7}$

$$= \left(5 + \frac{5}{7}\right) \times \frac{1}{10^7}$$

अर्थात्, $\dfrac{4}{7000000} = \dfrac{5}{10^7} + \dfrac{5}{70000000}$ (6)

अब, $\dfrac{5}{70000000} = \dfrac{500000000}{70000000} \times \dfrac{1}{10^8}$

$$= \left(7 + \frac{1}{7}\right) \times \frac{1}{10^8}$$

अर्थात्, $\dfrac{5}{70000000} = \dfrac{7}{10^8} + \dfrac{1}{700000000}$ (7)

इत्यादि।

क्रमशः (7) को (6) में, (6) को (5) में, (5) को (4) में, (4) को (3) में, (3) को (2) में और (2) को (1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{14} = \frac{7}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{4}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{8}{10^6} + \frac{5}{10^7} + \frac{7}{10^8} + \ldots \quad (8)$$

स्थानीय मान के सिद्धांत का प्रयोग कर हम (8) को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\frac{1}{14} = 0.07142857\ldots$$

क्या हम कह सकते हैं कि प्रक्रिया समाप्त नहीं होती। वस्तुतः अंक दोहराने प्रारम्भ हो जाते हैं। हम कहते हैं कि इस संख्या का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है।

क्या अब आप इस 'प्रक्रिया' को लम्बी विभाजन विधि के चरणों में समझ कर सकते हैं? यदि हां तो निम्न प्रश्नावली हल करने का प्रयत्न कीजिए।

प्रश्नावली 5.2

1 निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{13}{20}$ (ii) $\frac{9}{8}$ (iii) $\frac{3}{32}$

2 निम्न में से प्रत्येक का दशमलव के 4 स्थानों तक दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{11}{524}$ (ii) $\frac{679}{1375}$ (iii) $\frac{294}{90}$

5.3 सांत अथवा असांत आवर्ती दशमलव

क्या हम किसी परिमेय संख्या को केवल देख कर ही बता सकते हैं कि उसका दशमलव निरूपण सांत होगा या असांत आवर्ती? हम यह मान लेते हैं कि वह परिमेय संख्या निम्नतम पदों में है। आइए, देखें कि हम कौन से

उदाहरणों का अध्ययन कर चुके हैं। हम देखते हैं कि निम्न परिमेय संख्याओं के निरूपण सांत दशमलव हैं :

$$\frac{1}{4}, \frac{11}{8}, \frac{27}{10}, \frac{1643}{64}, \frac{577}{500}$$

आइए इनमें से प्रत्येक के हर के अभाज्य गुणनखंड (prime factorization) करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$4 = 2 \cdot 2$

$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$

$10 = 2 \cdot 5$

$64 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$500 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

हम देखते हैं कि इनमें हरों के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 और 5 हैं। वास्तव में यह सिद्ध* किया जा सकता है कि यदि किसी परिमेय संख्या, जो कि निम्नतम पदों में है, के हर के 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य अभाज्य गुणनखंड न हों तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत होता है। यदि हर के 2 और 5 के अतिरिक्त कोई अन्य गुणनखंड हों तो उस परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होता है।

आइए पुनः हम अपने उदाहरणों पर वापिस आ जाएं। आपको याद होगा कि परिमेय संख्याओं $\frac{1}{3}, \frac{24}{7}$ और $\frac{1}{14}$ (जिनके हरों के 2 और 5 के अतिरिक्त भी अभाज्य गुणनखंड हैं) के दशमलव निरूपण वास्तव में असांत आवर्ती हैं।

---

*इस परिणाम की उपपत्ति इस पुस्तक की सीमा के बाहर है।

आइए, कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निर्धारित कीजिए कि निम्न में से किस-किस के दशमलव निरूपण सांत हैं और किस-किस के असांत आवर्ती :

(*i*) $\frac{33}{24}$ (*ii*) $\frac{253}{1280}$ (*iii*) $\frac{486}{3360}$

हल : (*i*) हम देखते हैं कि $\frac{33}{24}$ निम्नतम पदों में नहीं है। हम अंश और हर में से 3 को काट देते हैं और तब हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{33}{24}=\frac{11}{8}$$

अब, $8=2\times 2\times 2$

हर के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 हैं।

इस प्रकार, $\frac{33}{24}$ का दशमलव निरूपण सांत होगा।

(*ii*) $\frac{253}{1280}$ निम्नतम पदों में है।

अब, $1280=2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 5$

हर के अभाज्य गुणनखंड केवल 2 और 5 हैं।

इस प्रकार, $\frac{253}{1280}$ का दशमलव निरूपण सांत होगा।

(*iii*) $\frac{486}{3360}=\frac{2\times 3\times 81}{2\times 3\times 560}=\frac{81}{560}$

अब, $560=2\times 2\times 2\times 2\times 5\times 7$

चूँकि हर का 2 और 5 के अतिरिक्त एक अन्य अभाज्य गुणनखंड (अर्थात् 7) है,

अतः $\frac{486}{3360}$ का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती होगा।

5.4 ऋणात्मक परिमेय संख्याओं के दशमलव निरूपण

यदि $\frac{p}{q}$ एक ऋणात्मक परिमेय संख्या हो तो स्पष्ट है कि $-\frac{p}{q}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या होगी। हम पहले से ही जानते हैं कि एक धनात्मक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। इस निरूपण के आगे ऋण चिन्ह (minus sign) लगाने पर जो हमें प्राप्त होता है उसे दी हुई ऋणात्मक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण कहा जाता है।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : $\frac{-27}{20}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{27}{20}$ का ऋणात्मक $\frac{27}{20}$ है।

अब, $\frac{27}{20} = 1.35$

इस प्रकार, $\frac{-27}{20} = -1.35$

उदाहरण 2 : $\frac{-1473}{250}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $\frac{-1473}{250}$ का ऋणात्मक $\frac{1473}{250}$ है।

अब, $\frac{1473}{250} = 5.892$

इस प्रकार, $\frac{-1473}{250} = -5.892$

उदाहरण 3 : $\frac{-52}{15}$ का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए।

हल : $-\frac{52}{15}$ का ऋणात्मक $\frac{52}{15}$ है।

अब, $\frac{52}{15} = 3.46$

इस प्रकार, $\frac{-52}{15} = -3.46$

प्रश्नावली 5.3

1. बिना भाग दिए निर्धारित कीजिए कि निम्न में से किस-किस के दशमलव निरूपण सांत हैं और किस-किस के असांत आवर्ती :

   (i) $\frac{92}{625}$ (ii) $\frac{-39}{160}$

   (iii) $\frac{63}{140}$ (iv) $\frac{837}{325}$

   (v) $\frac{-19}{22}$ (vi) $\frac{-527}{300}$

   (vii) $\frac{21}{49}$

2. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए :

   (i) $\frac{-39}{160}$ (ii) $\frac{-391}{128}$

   (iii) $\frac{-527}{300}$ (iv) $\frac{-19}{22}$

5.5 संख्या रेखा की सहायता से दशमलव निरूपण

हम पहले से ही जानते हैं कि एक परिमेय संख्या को संख्या रेखा पर किस प्रकार निरूपित किया जाता है। अब हम सीखेंगे कि संख्या रेखा का प्रयोग करके उसका दशमलव निरूपण किस प्रकार प्राप्त किया जाता है। आइए, उदाहरणार्थ, संख्या $\frac{1}{4}$ पर विचार करें। संख्या $\frac{1}{4}$ को निरूपित करने वाला बिंदु P प्राप्त

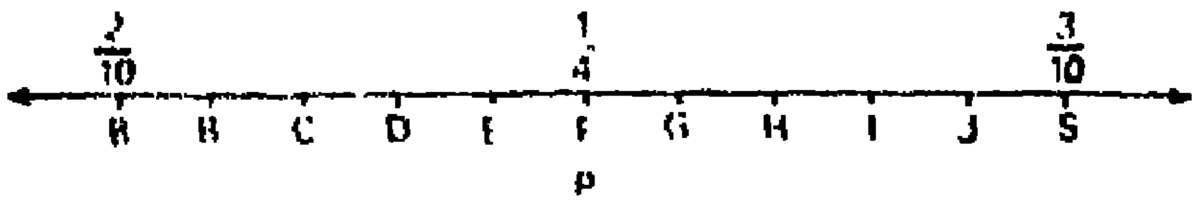


आकृति 5.1

करने के लिए हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA को 4 समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं। [4 समान रेखाखंडों में विभाजन और संख्याओं $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ को आकृति 5.1 में नहीं दिखाया गया है।] अब हम 0 से 1 तक की दूरी (अंतराल) OA को 10 समान रेखाखंडों में भी विभाजित करते हैं जिससे हमें $\frac{1}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु Q, $\frac{2}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु R तथा $\frac{3}{10}$ निरूपित करने वाला बिंदु S प्राप्त होता है। (देखिए आकृति 5.1)

हम देखते हैं कि $P\left(\frac{1}{4}\right)$, बिंदुओं $R\left(\frac{2}{10}\right)$ और $S\left(\frac{3}{10}\right)$ के बीच स्थित है। दूसरे शब्दों में,

$$\frac{2}{10} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{10}$$



आकृति 5.2

तदुपरान्त हम $\frac{2}{10}$ से $\frac{3}{10}$ तक की दूरी (अंतराल) RS लेते हैं और उसे पुनः 10 समान रेखाखंडों में विभाजित करते हैं जिससे हमें बिन्दु B, C, D, E, F, G, H, I और J प्राप्त होते हैं जैसाकि आकृति 5.2 में दिखाया गया है। [आकृति 5.1 के RS को 8 गुना बढ़ाकर आकृति 5.2 में दिखाया गया है।] अब B कौन सी परिमेय संख्या निरूपित करता है? चूँकि $\frac{1}{10}$ मात्रक की दूरी को 10 समान रेखाखंडों में उपविभाजित (subdivide) किया गया है, अतः स्पष्ट है कि B, $\frac{2}{10}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ अर्थात् $\frac{2}{10}+\frac{1}{100}$ निरूपित करता है।

इसी प्रकार C, $\frac{2}{10}+\frac{2}{100}$ निरूपित करता है; D, $\frac{2}{10}+\frac{3}{100}$ निरूपित करता है; इत्यादि।

हम देखते हैं कि बिंदु F, P के सपाती है। बिंदु F कौन-सी परिमेय संख्या निरूपित करता है? F, $\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$ निरूपित करता है। अतः हमें निम्न प्राप्त होता है -

$$\frac{1}{4}=\frac{2}{10}+\frac{5}{100}$$

स्थानीय मान के सिद्धांत का प्रयोग करने पर हमें $\frac{1}{4}$ का दशमलव निरूपण 0.25 प्राप्त हो जाता है।

दशमलव निरूपण ज्ञात करने की उपर्युक्त विधि कुछ अधिक जटिल है। साथ ही, यदि इसकी तुलना विभाजन की विधि से की जाए तो यह अव्यावहारिक लगती है। इसलिए हम इस पुस्तक में इस विधि का आगे प्रयोग नहीं करेंगे। पाठक यदि चाहें तो कुछ परिमेय संख्याओं, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{5}, \frac{6}{25}, \frac{3}{20}$ का इस विधि से दशमलव निरूपण ज्ञात कर सकते हैं।

मुख्य संकल्पनाएँ

सांत दशमलव	लम्बी विभाजन विधि
असांत आवर्ती दशमलव	परिमेय संख्याओं का दशमलव निरूपण

एकक VI

परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजक

इस एकक में हम परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों (algebraic expressions with rational coefficients) के बारे में अध्ययन करेंगे। विशेष रूप से हम यह सीखेंगे कि एक चर बहुपदों को किस प्रकार जोड़ा और घटाया जाता है। किसी प्रथम घात के बहुपद का शून्य ज्ञात करने की विधि का भी उल्लेख किया गया है।

6.1 पुनरावलोकन

आप पिछली कक्षाओं में पढ़े हुए एकक 'पूर्णांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजक' का पुनरावलोकन कीजिए। विशेष रूप से आपको निम्न संकल्पनाओं का पुनरावलोकन करना चाहिए :

बीजीय व्यंजक —एकपदी और द्विपद।

बीजीय व्यंजक के पद—पद के गुणनखंड : अक्षर गुणनखंड, संख्यात्मक गुणनखंड। पद का गुणांक। समान पद।

बीजीय व्यंजकों का योग और व्यवकलन।

समूहन संकेतों के प्रयोग—छोटा कोष्ठक, बड़ा कोष्ठक और मंझला कोष्ठक।

बीजीय व्यंजकों का गुणन।

किसी व्यंजक का मान—प्रतिस्थापन।

6.2 परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजक

अब हम परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों के बारे में अध्ययन करते हैं। आपको याद होगा कि बीजीय व्यंजक एक संख्या अथवा मूलभूत संक्रिया(ओं) के उपयोग से बना संख्याओं (अक्षर संख्याएं भी सम्मिलित हैं) का एक संयोग होता है।

$\frac{4}{7}x+\frac{3}{16}x^2$, $\frac{2}{3}+8x$, $\frac{3}{17}xy$, $2.3x^4$, $\frac{27}{4}$, $\frac{5}{11}z$, $-\frac{3}{2}xyz$,

$\frac{x+1}{2x-3}$, $\frac{\frac{3}{5}x^2+xy-4}{x^2+y}$, इत्यादि परिमेय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों के कुछ उदाहरण हैं। इनमें से $\frac{4}{7}x+\frac{3}{16}x^2$, $\frac{5}{11}z$, $2.3x^4$ और $\frac{x+1}{2x-3}$ उन व्यंजकों के उदाहरण हैं जिनमें केवल एक ही अक्षर संख्या (literal number) संबद्ध है। हम कहते हैं कि ये एक चर के बीजीय व्यंजक (algebraic expressions in one variable) हैं। $\frac{2}{3}+8x$, $\frac{3}{17}xy$ और $\frac{\frac{3}{5}x^2+xy-4}{x^2+y}$ दो चरों के बीजीय व्यंजकों के उदाहरण हैं। अन्त में, $-\frac{3}{2}xyz$ तीन चरों के बीजीय व्यंजक का एक उदाहरण है।

$a+bx+cx^2+dx^3+\ldots$ के रूप का बीजीय व्यंजक एक चर x में बहुपद (polynomial in one variable, x) कहलाता है। हम a, b, c, d, इत्यादि को परिमेय संख्याएं इस प्रकार लेंगे कि इनमें से कम से कम एक अवश्य ही शून्येतर* हो। तीन बिंदियाँ यह दर्शाती हैं कि बहुपद में x की उच्चतर घातों

*जब सभी गुणांक $a, b, c, d,$ इत्यादि शून्य हों तो बहुपद शून्य बहुपद (zero polynomial) कहलाता है।

(higher powers) के और अधिक (परिमित संख्या के) पद भी हैं। इस प्रकार, $\frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2$ और $2.3x^4$, x में बहुपद हैं तथा $\frac{5}{11}z$, z में एक बहुपद है।

हम देखते हैं कि $\frac{x+1}{2x-3}$, x में एक बीजीय व्यंजक है परन्तु x में एक बहुपद नहीं है।

बहुपदों के कुछ अन्य उदाहरण निम्न हैं :

$2x-\frac{3}{4}x^2$, $\frac{1}{4}-3x+\frac{5}{7}x^4$, x^{10}, $2+\frac{2}{7}y-18y^4$, $z-19z^5$,

$\frac{4}{3}$, $1.2x+2x^2$, इत्यादि।

इस एकक में हम एक चर में बहुपद अर्थात् एक चर बहुपदों का अध्ययन करेंगे।

6.3 बहुपद की घात

अब हम बहुपद की घात (degree of a polynomial) की संकल्पना का अध्ययन करते हैं। पहले हम एकपदी (monomial) की घात के बारे में अध्ययन करेंगे। निम्न एकपदियों पर विचार कीजिए :

$$2x,\ -\frac{3}{2}x^2,\ \frac{7}{4}x^3$$

हम देखते हैं कि एकपदी $2x$ में चर का घातांक (exponent of the variable) 1 है, एकपदी $-\frac{3}{2}x^2$ में चर का घातांक 2 है। एकपदी $\frac{7}{4}x^3$ में चर का घातांक क्या है ?

हम कहते हैं कि x में एकपदी की घात, एकपदी में x का घातांक होता है। इस प्रकार, $2x$ की घात 1 है, $\frac{3}{2}x^2$ की घात 2 है तथा $\frac{7}{4}x^3$ की घात 3 है। $\frac{13}{4}z^5$ की घात क्या है? z^6 की घात क्या है?

एकपदी, उदाहरणार्थ, 1 की घात के बारे में आप क्या सोचते हैं? हम $x^0=1$ लिखते हैं। अतः हम कहते हैं कि, x में 1 की घात 0 है। इसी प्रकार एक एकपदी जैसे कि $\frac{27}{4}$ को $\frac{27}{4}x^0$ लिखा जा सकता है। इसकी घात भी शून्य ही है।

आइए अब एक द्विपद (binomial), उदाहरणार्थ, $2x-\frac{3}{4}x^2$ पर विचार करें। इसके दो पद, अर्थात्, $2x$ और $\frac{-3}{4}x^2$ हैं। प्रत्येक पद एक एकपदी है और हम जानते हैं कि इसकी घात किस प्रकार ज्ञात की जाती है। $2x$ की घात 1 है तथा $-\frac{3}{4}x^2$ की घात 2 है। दोनों घातों में बड़ी घात 2 है।

हम कहते हैं कि उपर्युक्त द्विपद की घात 2 है। $-\frac{11}{2}x+18x^4$ की घात क्या है? दोनों घातों में बड़ी घात 4 है। अतः द्विपद $\frac{-11}{2}x+18x^4$ की घात 4 है।

क्या अब आप बता सकते हैं कि त्रिपद (trinomial) की घात किस प्रकार ज्ञात की जाती है? उदाहरणार्थ, $4-\frac{x^2}{3}+7x^4$ पर विचार कीजिए। तीनों पदों की घातें क्रमशः 0, 2 और 4 हैं। इन तीनों घातों में 4 सबसे बड़ी घात है। हम कहते हैं कि त्रिपद $4-\frac{x^2}{3}+7x^4$ की घात 4 है।

इस प्रकार, किसी बहुपद की घात उसके विभिन्न पदों की घातों में सबसे बड़ी घात होती है। उदाहरणार्थ, बहुपद $2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^5+7x^3$ पर विचार कीजिए। इसमें 4 पद हैं। इन 4 पदों की घातें क्रमशः 1, 2, 5 और 3 हैं। इन चारों घातों में सबसे बड़ी घात 5 है। अतः बहुपद $2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{4}{3}x^5+7x^3$ की घात 5 है। हम नीचे बहुपदों और उनकी घातों के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं :

बहुपद	घात
$\frac{7}{16}$	0
$x^3+\frac{x^2}{4}-7$	3
$0.2y^5-y$	5
$2y-\frac{3}{2}y^4$	4
$1-3x+x^2-\frac{x^3}{7}$	3
$2.7x^3$	3
$7x+3.2$	1
$-18+y^4-\frac{2}{9}y^2$	4
$7x^5-\frac{2}{3}x^4+16x^7-x^8+5$	8
$\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}+\frac{x^6}{6}$	6

प्रश्नावली 6.1

1 निम्न में से कौन-कौन से बीजीय व्यंजक बहुपद हैं ?

(i) $3 - 2x$ (ii) $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 7$

(iii) $\frac{y^2+y-3.5}{2y^2+9.5}$ (iv) $1 - \frac{3}{x}$

(v) $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + 2x^2 - 7x^3 + 8x^4 - 5x^5 + 20x^6$

(vi) $2.8z$

2 निम्न एकपदियों में से प्रत्येक की घात लिखिए

(i) $10x$ (ii) $\frac{7}{8}y^3$

(iii) $100x^{50}$ (iv) $\frac{18}{5}x^7$

(v) $-\frac{1}{3}$ (vi) $2.3z^5$

*(vii) x^n, जहाँ n एक पूर्ण संख्या है।

3 निम्न एकपदियों को उनकी घातों के आरोही क्रम में लिखिए :

$$1.2,\ 5x^{10},\ 3x^7,\ \frac{2}{9}x^{11},\ \frac{1}{3}x^2,\ 3.7x^{15}$$

4 निम्न एकपदियों को उनकी घातों के अवरोही क्रम में लिखिए

$$7y^6,\ -8y^5,\ \frac{6}{11}y^9,\ 2.3y^4,\ 43,\ 1.6y^{16}$$

5. निम्न में से प्रत्येक बहुपद की घात ज्ञात कीजिए। प्रत्येक बहुपद को पुनः इस प्रकार लिखिए कि उसके पद अपनी घातों के आरोही क्रम में आएं।

(i) $5 + \frac{3}{8}y^{3} - 7y$

(ii) $8 + 9x^{3} - \frac{5}{4}x^{5}$

(iii) $\frac{3}{2}x^{4} - 7x + \frac{2}{3}x^{2}$

(iv) $5x + \frac{4}{5}x^{4} - 4$

(v) $3.2x - 20.5 + 12x^{7} - 8x^{9}$

(vi) $50 - 16x^{9} + \frac{5}{3}x^{6} - 5x^{10} + \frac{3}{2}x^{8} - \frac{7}{8}x^{3}$

6. एक चर के बीजीय व्यंजकों के ऐसे दो उदाहरण दीजिए जो बहुपद नहीं हैं।

7. x में 3 घात का एक बहुपद लिखिए। एक 4 घात का बहुपद तथा एक 0 घात का बहुपद भी लिखिए।

*8. निम्न में से प्रत्येक बहुपद की घात लिखिए। $a, b, c, d,$ इत्यादि परिमेय संख्याएँ हैं।

(i) $a, (a \neq 0)$

(ii) $a + bx, (b \neq 0)$

(iii) $a + bx + cx^{2}, (c \neq 0)$

(iv) $a + bx + cx^{2} + dx^{3}, (d \neq 0)$

(v) $a + bx + cx^{2} + dx^{3} + ex^{4}, (e \neq 0)$

6.4 बहुपदों का योग और व्यवकलन

हम पहले से ही जानते हैं कि पूर्णांकीय गुणांकों के बीजीय व्यंजकों* को किस प्रकार जोड़ा (या घटाया) जाता है। हम केवल समान पद (like terms) लेते हैं और उन्हें जोड़ (या घटा) देते हैं। अतः परिमेय गुणांकों से कोई कठिनाई उत्पन्न नहीं होनी चाहिए। हम पुनः समान पद लेंगे और उन्हें जोड़ (या घटा) लेंगे। हम नीचे कुछ उदाहरण दे रहे हैं :

उदाहरण 1 : $2x^5+3x+\frac{2}{3}$ और $-3x^5+\frac{2}{5}x-3$ को जोड़िए।

हल : हम समान पद लेते हैं और उन्हें जोड़ते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2x^5+3x+\frac{2}{3}+\left(-3x^5+\frac{2}{5}x-3\right)$$

$$=\left[2x^5+(-3)x^5\right]+\left[3x+\frac{2}{5}x\right]+\left[\frac{2}{3}+(-3)\right]$$

$$=\left[2+(-3)\right]x^5+\left[3+\frac{2}{5}\right]x+\left[\frac{2}{3}+(-3)\right]$$

$$=-x^5+\frac{17}{5}x-\frac{7}{3}$$

विकल्पतः हम बहुपदों को इस प्रकार लिखते हैं कि उनके समान पद एक ही स्तम्भ में रहें और फिर उन्हें जोड़ते हैं। निस्सदेह बहुपद में, यदि

---

* हमने पिछली कक्षाओं में जो बीजीय व्यंजक पढ़े थे वे, वस्तुतः, बहुपद थे।

आवश्यक हो तो, पदों का क्रम बदला जा सकता है।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{r} 2x^3+3x+\frac{2}{3} \\ -3x^3+\frac{2}{5}x-3 \\ \hline -x^3+\frac{17}{5}x-\frac{7}{3} \end{array}$$

निस्संदेह, यह (स्तम्भानुसार) योग अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 2 : $2x^3-\frac{1}{2}x^2-1$ में से $3x^3+x^2-x$ को घटाइए।

हल हम समान पद लाते हैं और घटाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2x^3-\frac{1}{2}x^2-1-\left(3x^3+x^2-x\right)$$

$$=\left[2x^3-3x^3\right]+\left[-\frac{1}{2}x^2-x^2\right]-1-(-x)$$

$$=-x^3-\frac{3}{2}x^2-1+x$$

विकल्पतः हम बहुपदों को इस प्रकार लिखते हैं कि उनके समान पद एक स्तम्भ में हों और फिर घटाते हैं। पुनः यदि आवश्यक हो तो, बहुपद में पदों का क्रम बदला जा सकता है। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & -1 & \\ +3x^3 & +x^2 & & -x \\ - & - & & + \\ \hline -x^3 & -\frac{3}{2}x^2 & -1 & +x \\ \hline \end{array}$$

निस्संदेह, यह (स्तम्भानुसार) व्यवकलन अधिक सुविधाजनक रहता है।

उदाहरण 3 : $\frac{3}{2}x^2 - \frac{5}{4}x^3 + 3$, $\frac{3}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x^4 - 7$ और $-3x^4 + 8 + \frac{1}{2}x^3 - 5x^2$ के योग में से $x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ को घटाइए।

हल : हम स्तम्भानुसार विधि को प्राथमिकता देंगे। हम बहुपदों को इस प्रकार लिखेंगे कि समान पद एक ही स्तम्भ में रहें। आपको याद होगा कि किसी बहुपद को घटाने के लिए हम उसके प्रत्येक पद का चिन्ह बदलते हैं और उसे जोड़ देते हैं। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{array}{rrrrr}
\frac{3}{2}x^2 & -\frac{5}{4}x^3 & +3 & & \\
-\frac{1}{2}x^2 & +\frac{3}{4}x^3 & -7 & +x^4 & \\
-5x^2 & +\frac{1}{2}x^3 & +8 & -3x^4 & \\
+x^2 & -x^3 & +1 & +x^4 & -x \\
- & + & - & - & + \\
\hline
-5x^2 & +x^3 & +3 & -3x^4 & +x \\
\hline
\end{array}$$

उदाहरण 4 : समान पदों को एकत्रित कीजिए और जोड़िए :

$$\left(15x^3 - \frac{12}{5}x^2 + \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{25}{2}x^4 - 15x^3 + \frac{16}{5}x^7 - \frac{2}{5}\right)$$
$$+\left(\frac{3}{16}x - 5x^3\right) - \left(\frac{11}{16}x - x^3 + \frac{16}{5}x^7 - \frac{21}{5}\right)$$

हल : समान पद एकत्रित करने पर,

$$\left[15x^3 - 15x^3 - 5x^3 - (-x^3)\right] - \frac{12}{5}x^2 + \left[\frac{5}{2} - \frac{2}{5} - \left(-\frac{21}{5}\right)\right]$$
$$+\frac{25}{2}x^4 + \left[\frac{16}{5}x^7 - \frac{16}{5}x^7\right] + \left[\frac{3}{16}x - \frac{11}{16}x\right]$$

अब हम उन पदों को काटते हुए, जिनका योग (स्पष्टतया) शून्य है, समान पदों को जोड़ते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-4x^3-\frac{12}{5}x^2+\frac{63}{10}+\frac{25}{2}x^4-\frac{1}{2}x$$

उदाहरण 5 : $0.4x^5-18x^7+32$ और $7.2x-5.2x^4-1$ के योग में से $8.6x^7+2.8x^4-5.8x$ और $2.4x^7-3x^4+3$ का योग घटाइए।

हल : हम पहले $8.6x^7+2.8x^4-5.8x$ और $2.4x^7-3x^4+3$ का योग ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$[8.6x^7+2.8x^4-5.8x]+[2.4x^7-3x^4+3]$$
$$=11x^7-0.2x^4-5.8x+3 \qquad (1)$$

अब हम $0.4x^5-18x^7+32$ और $7.2x-5.2x^4-1$ का योग ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$[0.4x^5-18x^7+32]+[7.2x-5.2x^4-1]$$
$$=0.4x^5-18x^7+31+7.2x-5.2x^4 \qquad (2)$$

अंत में, हम (2) में से (1) को घटाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$[0.4x^5-18x^7+31+7.2x-5.2x^4]-[11x^7-0.2x^4-5.8x+3]$$
$$=0.4x^5-18x^7-11x^7+31-3+7.2x+5.8x-5.2x^4+0.2x^4$$
$$=0.4x^5-29x^7+28+13x-5x^4$$

विकल्पतः हम स्तम्भानुसार योग और व्यवकलन कर सकते हैं। चूंकि हमें अंतिम दो बहुपदों के योग को घटाना है, अतः स्पष्ट है कि इन दोनों बहुपदों में से प्रत्येक के प्रत्येक पद का चिन्ह बदला जाना चाहिए और फिर बहुपदों को जोड़ देना

चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$
\begin{array}{l}
0\,4x^5 - 18x^7 + 32 \\
\qquad\qquad - 1 + 7\,2x - 5\,2x^4 \\
+ 8\,6x^7 \quad - 5\,8x + 2\,8x^4 \\
+ 2\,4x^7 + 3 \qquad - 3x^4 \\
\hline
0\,4x^5 \;\; 29x^7 + 28 + 13x \;\; 5x^4
\end{array}
$$

प्रश्नावली 6.2

1. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(*i*) $3x^2, x$

(*ii*) $5x^2, -3x^2, 2x^2, -\frac{5}{3}x^2, 7$

(*iii*) $\frac{13}{4}x^2 - \frac{2}{3}x + 5, -\frac{17}{4}x^2 - 9 + \frac{1}{3}x$

(*iv*) $1.2x^3 + 2.3x^2 + 2 - 3x$, $2.1x^3 - 1.6x^2 + 3.4x - 9$

(*v*) $2 + 5x^4 - \frac{5}{4}x^2$, $3x^4 - \frac{11}{4}x^2 - 12x$

(*vi*) $\frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{8}x + 9$, $\frac{1}{3}x^3 + 6 + \frac{7}{8}x + 2x^2$

(*vii*) $x^5 - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{6}x^3 + \frac{4}{5}x^2 + \frac{7}{8}x$

(*viii*) $6x^2 - \frac{3}{2}x + 7$, $\frac{1}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{5}{24}$

2 घटाइए :

(i) $-2x^3 + \frac{1}{3}x^2 - 12$ में से $6x^3 - \frac{5}{3}x^2 + 4$

(ii) $10 + 3x + 5x^2 - \frac{7}{9}x^3$ में से $\frac{5}{4}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - x$

(iii) $-\frac{1}{13}x^2 + \frac{8}{13}x^3 + 20$ में से $\frac{12}{13}x^2 - \frac{5}{13}x^3 - 15$

(iv) $2.5x^2 + 1.5x^3 + 8 - 12x$ में से $2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$

(v) $31x^2 + 8x - \frac{3}{5}$ में से $19x^2 + \frac{12}{5}x + 1$

3 जोड़िए :

(i) $0.3x^2 - \frac{5}{4}x^3 + 8 + 6x,\ 1.3x^2 - \frac{9}{4}x^3 + 3$

और $4x^2 \quad \frac{15}{4}x^3 - x + 2$

(ii) $5x^5 - \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{4}x + 2,\ \frac{2}{5}x^2 + x - \frac{3}{8} + \frac{5}{2}x^5,\ -\frac{7}{4}x$

और $-\frac{1}{2}x^5 + \frac{11}{8}$

(iii) $\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{3}x - 3x^3 + 2,\ 3x^4 - \frac{14}{3}x,\ 5 - x^3, x^2$

और $\frac{5}{2}x^4 + \frac{22}{3}x + \frac{13}{2}x^3$

(iv) $x^5 + x^2 + \frac{1}{2}x^3,\; x + 1,\; \frac{2}{3}x^4 + \frac{5}{6}$ और

$\frac{1}{3}x^3 \quad x^2$

(v) $1 \quad \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{7}x^4,\; \frac{6}{13}x^5 + 8,\; \frac{14}{19}x^5 + 6x^3 \quad \frac{10}{7}x^3,$

$\frac{5}{19}x^5 + 12x^2 - 3 - \frac{6}{13}x^4$ और $2x^5 - \frac{1}{13}x^4 \quad \frac{2}{7}x^3$

4 समान पदों को एकत्रित कीजिए और जोड़िए

(i) $\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{6}x^4 \quad \frac{3}{2}x^5\right) + \left(\frac{1}{8}x^5 \quad \frac{7}{2}x^4 + x^3\right)$

(ii) $\left(\frac{7}{6}x + 7\right) - \left(\frac{1}{20}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{9}x^4 - \frac{1}{4}x^2\right)$

(iii) $(x^2 - x^3 + x^4 + x^6) - (\;1 \quad x - 2x^3 \quad x^5)$

(iv) $(1.2a^4 + 3a^3 - 2a^2 \quad 0.7a + 15) + (0.7a - 14 + a^2 \quad 3a^3 + 0.8a^4)$

(v) $\left(3x^2 + \frac{3}{4}x - 3\right) + \left(\frac{12}{11}x^2 + \frac{5}{2} + \frac{13}{4}x\right)$

$\left(\frac{1}{11}x^2 + \frac{17}{4}x + 5x^4\right)$

(vi) $\left(\frac{3}{4}x^3 - 3 - 5x^2\right) - \left(\frac{8}{5}x + \frac{13}{5}x^2 + \frac{11}{4}x^3\right)$

$+\left(8 + 3x - \frac{2}{5}x^2\right) - \left(13x^2 - \frac{3}{5}x - 5\right)$

(vii) $\left(7x^5 + \frac{21}{13}x^3 + 12x^2 \quad 3\right) \quad \left(\frac{25}{4}x^4 - \frac{13}{2} - \frac{5}{2}x^2\right)$

$$\left(\frac{3}{4}x^4 - 10 + \frac{1}{2}x^2\right) + \left(3x^5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{13}x^3\right)$$

5 $\frac{1}{6}x^7 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}$ और $x^6 + \frac{5}{4}x^5 - \frac{3}{2}x^4$ के योग में से $\frac{1}{3}x^7 + \frac{2}{3}x^6 + \frac{3}{4}x - 1$ को घटाइए।

6 $7x^3 + 13x^2 - 19x \quad 25$, $17 - 15x$ और $10x^2 \quad -4x^3$ के योग में से $42 \quad 11x^3 - 2x^2 + 4x$ और $\frac{5}{2}x^2 + 9x^3 - 42 - 4x$ का योग घटाइए।

7. आइए बहुपद $\frac{1}{5}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{12}x + \frac{5}{24}$ को P लिखें। परिकलित कीजिए

(i) $P - P$

(ii) $P + P + P + P$। [हम इस योग को 4P लिखते हैं।]

(iii) $P - (P + P + P)$

8. आइए बहुपद $\frac{1}{3}x^6 + \frac{7}{2}x^5 - \frac{3}{4}x^4$ को P, बहुपद $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 +$ $2x$ को Q तथा बहुपद $\frac{1}{7}x^5 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ को R लिखें। परिकलित कीजिए

(i) $P + Q$

(ii) $Q + P$

(iii) $(P + Q) + R$

(iv) $P + (Q + R)$

9 यदि P बहुपद $4x^4 - \frac{7}{4}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - x + 1$ को, Q बहुपद $\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{7}{2} + 3x$ को, R बहुपद $\frac{9}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^3 + x^2 - \frac{5}{2}x$ को तथा S बहुपद $11x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3$ को व्यक्त करता है तो निम्न को परिकलित कीजिए :

(*i*) $P+P$ । [हम इस योग को $2P$ से व्यक्त करते हैं ।]

(*ii*) $P+Q+R+S$

(*iii*) $P-2Q+4R$

(*iv*) $R-S+P$

10. $\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $8+3x^4, -\frac{7}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2$ और $\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5$ के योग में से $4x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 1$ और $x^3 + 3 - \frac{3}{2}x^2$ का योग घटाइए ।

11. $\frac{12}{7}x^5 - \frac{8}{9}x^4 - x^3 + 2x + 5$ प्राप्त करने के लिए $\frac{15}{7}x^5 - \frac{2}{9}x^4 - 3x + 5$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

12. $19x^4 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{14}{5}x^2 - 3x$ प्राप्त करने के लिए $17x^4 - \frac{17}{4}x^3 + \frac{11}{2}$ में से क्या घटाना चाहिए ?

6.5 बीजीय व्यंजक का मान ज्ञात करना

आप पूर्णांक गुणांकों के बीजीय व्यंजकों का मान ज्ञात करना पहले से ही जानते हैं। हम व्यंजक में चर का मान प्रतिस्थापित (substitute) कर देते हैं। यदि बीजीय व्यंजक के गुणांक परिमेय संख्याएँ हों तो उसका मान भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है। हम बीजीय व्यंजक में चर का मान प्रतिस्थापित कर देते हैं। उदाहरणार्थ, व्यंजक $\frac{4}{7}x + \frac{3}{16}x^2$ पर विचार कीजिए।

इसका, उदाहरणार्थ, $x = -1$ पर मान व्यंजक में $x = -1$ प्रतिस्थापित करके प्राप्त होता है। इस प्रकार हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{4}{7}(-1) + \frac{3}{16}(-1)^2$$

$$= -\frac{4}{7} + \frac{3}{16} = \frac{-4 \times 16 + 7 \times 3}{112}$$

$$= -\frac{43}{112}$$

इसी प्रकार, उदाहरणार्थ, $x = \frac{7}{4}$ पर इसका मान निम्न है

$$\frac{4}{7}\left(\frac{7}{4}\right) + \frac{3}{16}\left(\frac{7}{4}\right)^2$$

$$= 1 + \frac{147}{256} = \frac{403}{256}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 $x = \frac{1}{2}$ और -2 पर, $2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{4}{3}x^5 + 7x^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = \frac{1}{2}$ पर, हम देखते हैं कि मान निम्न है

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 7\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$= 1 - \frac{3}{8} + \frac{4}{96} + \frac{7}{8}$$

$$= \frac{37}{24}$$

$x = -2$ पर, हमें निम्न मान प्राप्त होता है

$$2(-2) - \frac{3}{2}(-2)^2 + \frac{4}{3}(-2)^5 + 7(-2)^3$$

$$= -4 - 6 - \frac{128}{3} - 56$$

$$= -\frac{326}{3}$$

उदाहरण 2 : $x = 0, 1$ और $-\frac{3}{2}$ पर $\frac{x+1}{2x-3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $x = 0$ पर, हमें मान $\frac{0+1}{2(0)-3} = -\frac{1}{3}$ प्राप्त होता है।

$x = 1$ पर, मान $\frac{1+1}{2(1)-3} = -2$ है।

$x = -\frac{3}{2}$ पर, मान $\frac{-\frac{3}{2}+1}{2\left(-\frac{3}{2}\right)-3} = \frac{-\frac{1}{2}}{-6} = \frac{1}{12}$ है।

उदाहरण 3 : $y=-4$ पर बहुपद $\frac{4}{5}y^3-\frac{1}{3}y^2+6y-\frac{1}{4}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम बहुपद में $y=-4$ प्रतिस्थापित करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\frac{4}{5}(-4)^3-\frac{1}{3}(-4)^2+6(-4)-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{256}{5}-\frac{16}{3}-24-\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{4847}{60}$$

6.6 बहुपद का शून्य

बहुपद $3+2x$ पर विचार कीजिए। आइए $x=-\frac{3}{2}$ पर इसका मान ज्ञात करें।

$x=-\frac{3}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$3+2\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$=3-3=0$$

आइए अब बहुपद $-\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}$ को लें और $x=\frac{9}{4}$ के लिये इसका मान ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-\frac{2}{3}\left(\frac{9}{4}\right)+\frac{3}{2}$$

$$=-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=0$$

वह संख्या जिसके लिए बहुपद का मान शून्य हो बहुपद का एक शून्य (zero) कहलाती है। इस प्रकार, $-\frac{3}{2}$ बहुपद $3+2x$ का शून्य है। $-\frac{9}{4}$ बहुपद $\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}$ का शून्य है।

बहुपद के शून्य ज्ञात करने की समस्या बीजगणित में एक महत्वपूर्ण समस्या है। आइए, x में प्रथम घात के बहुपद पर विचार करें। क्या आपको याद है कि ऐसे बहुपद को हम किस प्रकार लिखते हैं? यह $a+bx$ के रूप में लिखा जाता है। a और b क्या हैं? ये परिमेय संख्याएँ हैं। निस्सन्देह, b अवश्य ही शून्येतर होना चाहिए। (क्यों?) हम इसका $x=-\frac{a}{b}$ पर मान ज्ञात करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a+b\left(-\frac{a}{b}\right)$$

$$=a-a=0$$

हम देखते हैं कि $x=-\frac{a}{b}$ पर इसका मान शून्य है। हम कहते हैं कि $-\frac{a}{b}$, x में प्रथम घात के बहुपद $a+bx$ का शून्य है।

आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण : बहुपद $\frac{1}{2}-2x$ का शून्य ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

हल : $\frac{1}{2}-2x$, x में प्रथम घात का एक बहुपद है। यह $a+bx$ के रूप का है। हम देखते हैं कि यहाँ $a=\frac{1}{2}$ तथा $b=-2$ है।

हम यह भी देखते हैं कि $b \neq 0$ है।

इस प्रकार $x = -\frac{a}{b}$ पर इसका मान शून्य होगा।

अर्थात्, $x = -\frac{\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$ पर इसका मान शून्य होगा।

अतः बहुपद $\frac{1}{2} - 2x$ का शून्य $\frac{1}{4}$ है।

आइए जाँच करें कि वस्तुतः ऐसा ही सत्य है। हम $\frac{1}{2} - 2x$ में $x = \frac{1}{4}$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

x में उच्च घातों के बहुपदों के शून्य ज्ञात करने की विधियाँ इतनी सरल नहीं हैं। उनका अगली कक्षाओं में उल्लेख किया जाएगा।

प्रश्नावली 6.3

1. निम्न में से प्रत्येक बीजीय व्यंजक का चर के दिए हुए मानों पर मान ज्ञात कीजिए

   (i) $-5x^4$, $x = 0, 2, -2$ और $\frac{1}{2}$ पर

(ii) $\frac{3}{2}x^2 \quad 7$; $x \quad 2, \quad 2$ और 4 पर

(iii) $\frac{13}{7} \quad \frac{19}{28}x^3$; $x \quad 0$ पर

(iv) $\frac{6x^2 \quad 5}{x \quad 3}$; $x \quad 1, \quad \frac{1}{3}$ और 2 पर

(v) $\dfrac{\frac{7}{2}x^3 + x \quad \frac{3}{2}}{x^2 \quad x + 8}$; $x \quad 0$ और 2 पर

2 निम्न में से प्रत्येक बहुपद का चर के दिए हुए मानों पर मान ज्ञात कीजिए

(i) $3x^4 \quad \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$; $x = \quad 1$ और 1 पर

(ii) $z^3 + \frac{1}{5}z^4 \quad \frac{2}{5}z - \frac{1}{4}$, $z \quad 0$ पर

(iii) $y^3 + \frac{7}{8}y^4 + \frac{3}{2}y^5 + 1$, $y = -2$ पर

(iv) $x^2 \quad 1$; $x \quad 0, \quad 1$ और 1 पर

(v) $x^5 + 1$; $x = \quad 1$ और $\frac{1}{2}$ पर

(vi) $\frac{18}{7}x^3 + \frac{1}{7}x \quad x^2 + 1$; $x = 7, 0$ और 1 पर

3. $x = 10$ पर $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ का मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि आपका उत्तर प्रथम 10 धनपूर्णांकों के योग के बराबर है।

4. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का शून्य ज्ञात कीजिए। अपने उत्तर की जाँच भी कीजिए।

(i) $2.5x - 10$

(ii) $\frac{6}{7}x + 3$

(iii) $8x - \frac{13}{2}$

(iv) $\frac{3}{4}x$

(v) $\frac{11}{8} - \frac{3}{2}x$

5. विश्राम से गिरते हुए एक पिंड की समय t पर दूरी s, बीजीय व्यंजक $4.9\,t^2$ से निरूपित की जाती है। $t = 3, 5, 8$ और 20 पर दूरी ज्ञात कीजिए।
[संकेत : $t = 3, 5, 8$ और 20 पर व्यंजक $4.9\,t^2$ का मान ज्ञात कीजिए।]

मुख्य संकल्पनाएँ

परिमेय गुणांकों के एक चर में बीजीय व्यंजक	बहुपदों का योग और व्यवकलन
परिमेय गुणांकों के एक चर बहुपद	बीजीय व्यंजक का मान
बहुपद की घात	बहुपद का शून्य

एकक VII

एक चर में प्रथम घात समीकरण

इस एकक में हम सीखेंगे कि परिमेय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों (first degree equations in one variable) को किस प्रकार हल किया जाता है। समीकरण की तुलना एक तुला से की गई है, जिसका समीकरणों को हल करने के लिए नियमों को ज्ञात करने में अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग किया गया है। अंत में, एक चर में प्रथम घात समीकरणों को हल करने के ज्ञान का उन परिमेय संख्याओं को ज्ञात करने में प्रयोग किया गया है जिनके दशमलव निरूपण दिए हुए असांत आवर्ती दशमलव हैं।

7.1 पुनरावलोकन

आप पिछली कक्षाओं में पढ़े हुए एकक 'समीकरणों का परिचय' का पुनरावलोकन कीजिए। विशेष रूप से आपको निम्न संकल्पनाओं को दोहराना चाहिए :

प्रतिबन्धित समीकरण अथवा समीकरण।

समीकरण के हल अथवा मूल (roots)।

पूर्णांकीय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों को हल करने के नियम।

7.2 परिमेय गुणांकों के समीकरण

अब हम परिमेय गुणांकों वाले समीकरणों का अध्ययन करते हैं। आपको याद होगा कि एक समीकरण, समता (equality) का एक ऐसा कथन होता है जिसमें एक अज्ञात* (unknown) राशि होती है।
परिमेय गुणांकों के समीकरणों के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

(i) $2x + \frac{1}{2} = 3$

(ii) $\frac{1}{2}y + 1 = 3y + \frac{4}{3}$

(iii) $\frac{1}{3}x - 17 = \left[2x - \left(x - \frac{15}{6}\right)\right]$, इत्यादि।

इन समीकरणों में से प्रत्येक में चर की घात 1 है। हम कहते हैं कि प्रत्येक, दिए हुए चर में, एक प्रथम घात समीकरण है।

इस पुस्तक में हम परिमेय गुणांकों की एक चर में प्रथम घात समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

7.3 समीकरण हल करना

आपको याद होगा कि समीकरण की एक तुला से तुलना की जा सकती है। इसके दोनों पक्ष (sides) तुला के दोनों पलड़े (pans) हैं तथा समता संकेत (equality sign) का अर्थ है कि दोनों पलड़े संतुलन में हैं। हमने उपर्युक्त का समीकरणों को हल करने के लिए नियमों को ज्ञात करने में अभिप्रेरण के रूप में

* कुछ लेखक 'अज्ञात' के स्थान पर 'चर' (variable) शब्द का प्रयोग करते हैं। हम दोनों शब्दों को अदल-बदल करके प्रयोग करेंगे।

प्रयोग किया था। क्या आपको ये नियम याद हैं? नियम ये है कि कोई समीकरण हल करने के लिए हम

(1) समीकरण के दोनों पक्षों में एक ही संख्या जोड़ सकते है,

(2) समीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही संख्या घटा सकते है,

(3) समीकरण के दोनों पक्षों को एक ही संख्या से गुणा कर सकते है तथा

(4) समीकरण के दोनो पक्षों को एक ही (शून्येतर) संख्या से भाग दे सकते है।

हम इन नियमों में से एक या अधिक का प्रयोग करते है और अंतिम चरण पर आने का प्रयास करते है कि अज्ञात संख्या (अर्थात् चर) स्वयं समीकरण के एक पक्ष के रूप में प्रकट हो जाए।

हम कुछ उदाहरण लेते है।

उदाहरण 1: $2x+\frac{1}{2}=3$ को हल कीजिए।

हल : हम समीकरण के दोनों पक्षों में से $\frac{1}{2}$ घटाते है (नियम 2)।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=3-\frac{1}{2}$$

अर्थात्,
$$2x=\frac{5}{2} \qquad (1)$$

अब हम (1) के दोनों पक्षों को 2 से विभाजित करते हैं (नियम 4)। दूसरे शब्दों में, हम दोनों पक्षों को $\frac{1}{2}$, जोकि 2 का व्युत्क्रम है, से गुणा करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2}\times 2x=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}$$

अर्थात्,
$$x=\frac{5}{4}$$

इस प्रकार, $x = \frac{5}{4}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

[निस्संदेह, हमें x के इस मान को दी हुई समीकरण में प्रतिस्थापित करके जाँच अवश्य करनी चाहिए। इससे निम्न प्राप्त होता है:

$$\text{वाम पक्ष} = 2\left(\frac{5}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 3 = \text{दक्षिण पक्ष}]$$

उदाहरण 2 : $\frac{1}{2}y + 1 = 3y + \frac{4}{3}$ को हल कीजिए।

हल : हम $3y$ को वाम पक्ष में स्थानान्तरण* (transpose) करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$\frac{1}{2}y - 3y + 1 = \frac{4}{3}$$

अर्थात्, $$-\frac{5}{2}y + 1 = \frac{4}{3}$$

अब हम 1 को दक्षिण पक्ष में ले** जाते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$-\frac{5}{2}y = \frac{4}{3} - 1$$

अर्थात्, $$-\frac{5}{2}y = \frac{1}{3} \qquad (1)$$

---

* पद के स्थानान्तरण करने का अर्थ केवल उसका चिह्न बदलकर उसे दूसरे पक्ष में ले जाना है।

**जब हमें अधिक अभ्यास हो जाए तो हम इन दोनों चरणों को निम्न प्रकार से एक ही चरण में समायोजित कर सकते हैं :

$$\frac{1}{2}y + 1 = 3y + \frac{4}{3}$$

$3y$ को वाम पक्ष और 1 को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2}y - 3y = \frac{4}{3} - 1, \text{ इत्यादि।}$$

(1) के दोनों पक्षों को $-\frac{2}{5}$ से गुणा करने पर (नियम 3) हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y=\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{5}\right)=-\frac{2}{15}$$

इस प्रकार, $y=-\frac{2}{15}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

[पाठक यह जाँच करें कि वस्तुतः यह ऐसा ही है।]

उदाहरण 3 : $\frac{1}{3}x-17=\left[2x-\left(x-\frac{15}{16}\right)\right]$ को हल कीजिए।

हल : $\frac{1}{3}x-17=2x-x+\frac{15}{16}$

अर्थात्, $\frac{1}{3}x-17=x+\frac{15}{16}$

x को वाम पक्ष और 17 को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{3}x-x=\frac{15}{16}+17$$

अर्थात्, $-\frac{2}{3}x=\frac{287}{16}$ (1)

(1) के दोनों पक्षों को $-\frac{3}{2}$ से गुणा करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$x=-\frac{287}{16}\times\frac{3}{2}=-\frac{861}{32}$$

इस प्रकार, $x=-\frac{861}{32}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

उदाहरण 4 : $\frac{2+y}{2y-3}=\frac{5}{6}$ को हल कीजिए।

हल : आपको याद होगा कि दो परिमेय संख्याएँ $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ तभी और केवल तभी समान होती हैं जबकि $ad=bc$ हो। अतः हम दी हुई समीकरण में वज्र गुणन (cross-multiplication) करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$6(2+y)=5(2y-3)$$

अर्थात्, $$12+6y=10y-15$$

$6y$ को दक्षिण पक्ष और 15 को वाम पक्ष में ले जाने पर,

$$27=4y$$

इस प्रकार, $$\frac{27}{4}=y$$

अतः, $y=\frac{27}{4}$ दी हुई समीकरण का एक हल है।

प्रश्नावली 7.1

निम्न समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

1. $\frac{1}{2}x+1=\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}$

2. $3x+4=\frac{4}{3}x+9$

3. $\frac{2}{3}y+5=\frac{1}{7}$

4 $\frac{1}{9}z + \frac{2}{9}z + 1 - \frac{2}{9}$

5 $(2x \quad 1) \cdot \frac{3}{10}(5x \quad 7)$

6 $\frac{5}{2}(3t \quad 2) - \frac{1}{3}(7t+6)$

7 $\frac{17}{x} + \frac{3}{2} \cdot 16$

8 $y \quad \frac{11}{13} \quad 2y \quad 15$

9 $\frac{2}{3}y \quad \frac{5}{7}y + \frac{2}{21}$

10 $\frac{4}{5}\left(\frac{2}{9}x + 1\right) \quad 3 - \frac{1}{9}x$

11 $3(0\ 35u + 0\ 34) \quad 1\ 14u - \frac{3}{50}$

12 $0\ 6x + \frac{4}{5} - 0\ 28x + 1\ 16$

13 $225\left(\frac{2}{25}y - \frac{2}{5}\right) = 2\ 9y - \left(25 - \frac{21}{10}y\right)$

14 $(42x \quad 4\ 2) - \frac{34}{5} \quad (19 - 30x) - 111$

15. $\frac{1 \quad 9y}{5} = \frac{19 \quad 3y}{8}$

16. $\frac{5}{3}x \quad \left(3 \quad \frac{8}{3}x\right) \quad 12 \quad \left[\frac{5}{3}x \; - \left(15 + \frac{10}{3}x\right)\right]$

17. $x \quad \left[4x + 2 \quad \left(\frac{15}{2}x + 4\right)\right] = 3 - \frac{7}{2}x$

18. $\frac{1 \quad y}{y+7} = \frac{3}{5}$

*19. $\frac{2}{3 \quad \frac{1}{4 \quad \frac{1}{y}}} = \frac{5}{8}$

20. $\frac{1 \quad \frac{1 + \frac{1-x}{2}}{3}}{4} = 1$

21. $\frac{5 \quad 3x}{4} \quad 2 = \frac{3 \quad x}{5} - \frac{7 - 4x}{5}$

22. $2\left[\frac{x}{2} \quad \frac{3}{2}\right] + \frac{5}{6} = 3x + 2\left(\frac{3}{4}x - \frac{2}{3}\right)$

23. $\frac{9}{4}\left[\left(\frac{2}{3} + \frac{16}{3}x\right) - \frac{8}{3}\left(\frac{4 \quad x}{4}\right)\right] = \frac{9}{4} - 2x - \left(\frac{3}{2} - 3x\right)$

24. $\frac{5}{7y} \quad \frac{3}{14} = \frac{7}{2y} + 3$

25. $\frac{2}{u} - \frac{11}{10} = \frac{2}{5} + \frac{1}{u}$

26. $\frac{4y+3}{3} + \frac{1}{3} - \frac{3y \quad 1}{2}$

27. $\frac{3t \quad 2}{2} + \frac{2t \quad 3}{3} = 2t + \frac{5}{6}$

7.4 समस्याएँ हल करने में समीकरणों का प्रयोग

अब हम कुछ शाब्द समस्याओं (word problems) पर विचार करेंगे जिन्हें समीकरणों के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, लगभग 1800 ई० पू० के एक मिस्रवासी अहमस द्वारा प्रतिपादित समस्या पर विचार कीजिए। [पुस्तक I का एकक VIII भी देखिए।]

एक संख्या और उसका दो-तिहाई और उसका आधा और उसका सातवाँ भाग 37 के बराबर है। संख्या ज्ञात कीजिए।

आइए वांछित संख्या को x से व्यक्त करें। हमें बताया गया है कि

$$x+\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{7}x=37 \qquad (1)$$

इस प्रकार हमने एक शाब्द समस्या को समीकरण के रूप में व्यक्त कर लिया है जिसे हम सरलता से हल कर सकते है। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{42x+28x+21x+6x}{42}=37$$

अर्थात्, $$\frac{97}{42}x=37$$

इस प्रकार, $$x=\frac{37\times 42}{97}=\frac{1554}{97}$$

अत: वांछित संख्या $\frac{1554}{97}$ है।

हम कुछ और उदाहरण लेते है।

उदाहरण 1 : दो संख्याओं, जिनमें एक दूसरी की दो-तिहाई है, का योग $\frac{28}{3}$ है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : आइए इनमें से एक संख्या को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें। तब, दूसरी संख्या $\frac{2}{3}x$ होगी।

हमें दिया है कि इनका योग $\frac{28}{3}$ है।

अर्थात्, $$x+\frac{2}{3}x=\frac{28}{3} \qquad (1)$$

इस प्रकार हमने दी हुई शाब्द समस्या को एक समीकरण के रूप में परिवर्तित कर लिया है जिसे हम सरलता से हल कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है:

$$\frac{5}{3}x=\frac{28}{3}$$

जिससे, $$x=\frac{28}{5}$$

अत: दूसरी संख्या $\frac{2}{3}\left(\frac{28}{5}\right)$ अर्थात् $\frac{56}{15}$ है।

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि $\frac{28}{5}$ और $\frac{56}{15}$ का योग वस्तुत: $\frac{28}{3}$ है। साथ ही यह भी जाँच करे कि $\frac{56}{15}$, $\frac{28}{5}$ का दो-तिहाई है।]

उदाहरण 2 : रवि की वर्तमान आयु अपने पिता की आयु की एक-तिहाई है। 12 वर्ष बाद उसकी आयु पिता की आयु की आधी हो जाएगी। उनकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल : यदि हम यह मान लें कि पिता की वर्तमान आयु, उदाहरणार्थ, x वर्ष है तो रवि की आयु $\frac{1}{3}x$ वर्ष होगी।

12 वर्ष बाद,

पिता की आयु $=(x+12)$ वर्ष

रवि की आयु $=\left(\frac{1}{3}x+12\right)$ वर्ष

परन्तु हमें दिया है कि 12 वर्ष बाद रवि की आयु पिता की आयु की आधी होगी।

अतः, $$\frac{1}{3}x + 12 = \frac{1}{2}(x + 12) \qquad (1)$$

अब हमने एक समीकरण प्राप्त करली है जिसे हम सरलता से हल कर सकते हैं। (1) में पदों का स्थानान्तरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x = 6 - 12$$

अर्थात्, $$-\frac{1}{6}x = -6$$

जिससे, $$x = 36$$

इस प्रकार, रवि की वर्तमान आयु 12 वर्ष है जबकि उसके पिता की वर्तमान आयु 36 वर्ष है।

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि 12 वर्ष बाद रवि की आयु अपने पिता की आयु की आधी हो जाएगी।]

उदाहरण 3 : एक आयत की चौड़ाई उसकी लम्बाई की दो-तिहाई है। यदि आयत का परिमाप 90 मीटर है, तो उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए आयत की लम्बाई x मीटर है।

तब उसकी चौड़ाई $= \frac{2}{3}x$ मीटर

अब, परिमाप $= x + \frac{2}{3}x + x + \frac{2}{3}x$

परन्तु परिमाप 90 मीटर दिया हुआ है। इस प्रकार,

$$x + \frac{2}{3}x + x + \frac{2}{3}x = 90$$

या, $\frac{10}{3}x = 90$

अर्थात्, $10x = 270$

या, $x = 27$

इस प्रकार, $\frac{2}{3}x = 18$

अत: आयत की लम्बाई और चौड़ाई क्रमश: 27 मीटर और 18 मीटर हैं।

[हम इस बात को जाँच कर सकते हैं कि चौड़ाई 18 मीटर, लम्बाई 27 मीटर की दो-तिहाई है। साथ ही, परिमाप $= 27 + 18 + 27 + 18 = 90$ मीटर है।]

उदाहरण 4 : एक मोटर-नाव (motor-boat) की अधोप्रवाह (down-stream) जाते हुए चाल 26.8 कि॰मी॰/घंटा है तथा ऊर्ध्वप्रवाह (upstream) जाते हुए चाल 15.6 कि॰मी॰/घंटा है। शांत जल में मोटर नाव की चाल तथा प्रवाह की चाल ज्ञात कीजिए।

हल : अधोप्रवाह जाते हुए, नाव की चाल अधिक है क्योंकि यह प्रवाह की धारा की दिशा में जा रही है। परन्तु ऊर्ध्वप्रवाह जाते हुए वह धारा के विरुद्ध जाती है और इसलिए उसकी चाल उस चाल से कम होगी जो वह शांत जल में चल रही होती।

आइए कि॰मी॰/ घंटा में प्रवाह की चाल को y से व्यक्त करें। तब, नाव की शांत जल में चाल $26.8 - y$ या $15.6 + y$ है।

अर्थात्, $26.8 - y = 15.6 + y$

इस प्रकार, $11.2 = 2y$

या, $y = 5.6$

अत: प्रवाह की चाल 5.6 कि॰ मी॰/घंटा है।

साथ ही, शांत जल में नाव की चाल $(26.8 - 5.6)$ या $(15.6 + 5.6)$ कि॰मी॰/घंटा है। हम देखते हैं कि प्रत्येक परिकलन से यह चाल 21.2 कि॰मी॰ प्रति घंटा आती है।

ध्यान दीजिए कि हमने विभिन्न प्रकार की चार शाब्दिक समस्याओं को समीकरणों के पदों में व्यक्त करके हल किया है। आपको याद होगा कि इन समस्याओं अर्थात् प्रश्नों को समीकरणों के पदों में व्यक्त करने की कोई निश्चित विधि नहीं है। फिर भी, कुछ बातें जिनसे उपयोगी संकेत मिल सकते हैं, निम्न हैं :

1. प्रश्न को बार-बार पढ़िए जब तक कि आप यह न समझ लें कि क्या दिया है और क्या ज्ञात करना है।
2. अज्ञात को किसी अक्षर x या y या z, इत्यादि से व्यक्त कीजिए।
3. (क) प्रश्न को धीरे-धीरे, एक एक वाक्यानुसार गणित की भाषा में परिवर्तित कीजिए।

   (ख) वे राशियाँ निर्धारित कीजिए जो कि बराबर हैं और उनसे एक समीकरण बनाइए।
4. अज्ञात के लिए समीकरण को हल कीजिए।
5. जाँच कीजिए कि प्राप्त उत्तर प्रश्न में दिए हुए प्रतिबन्धों को संतुष्ट करता है या नहीं।

प्रश्नावली 7.2

1. 30 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, लड़कियों की संख्या लड़कों की संख्या का $\frac{1}{5}$ है। कक्षा में लड़कों की संख्या ज्ञात कीजिए।
2. इन्दर स्वयं के और अपने 5 वर्षीय पुत्र के दिल्ली से कुरुक्षेत्र तक के टिकट के लिए 13.35 रु० देता है। यदि 12 वर्ष से कम के बच्चों का आधा किराया लगता है, तो दिल्ली से कुरुक्षेत्र का एक व्यक्ति का पूरा किराया ज्ञात कीजिए।

*3. एक संख्या दो अंकों की है। इकाई के स्थान पर अंक 8 है। यदि हम अंकों को बदल दें तो इस प्रकार बनी संख्या पहली संख्या का $\frac{7}{4}$ वाँ भाग है। दहाई के स्थान पर अंक ज्ञात कीजिए।

4. किसी त्रिभुज ABC का एक कोण A अन्य दोनों कोणों के योग के बराबर है। साथ ही, कोणों B और C का अनुपात 4 : 5 है। तीनों कोण ज्ञात कीजिए।

[संकेत : त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।]

5. किसी समद्विबाहु त्रिभुज का आधार उसकी प्रत्येक समान भुजा का तीन-चौथाई है। त्रिभुज का परिमाप 22 सेंटीमीटर है। भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

6. एक आदमी ने अपनी सम्पत्ति का एक-तिहाई अपने पुत्र के लिए, एक-चौथाई अपनी पुत्री के लिए तथा शेष अपनी पत्नी के लिए छोड़ा। यदि पत्नी के हिस्से का मूल्य 32000 रु० हो तो उस आदमी ने कितना रुपया छोड़ा था?

7. किसी परिमेय संख्या का अंश हर से 7 छोटा है। यदि हर 9 बढ़ा दिया जाए और अंश 2 बढ़ा दिया जाए तो हमें पुन: वही परिमेय संख्या प्राप्त हो जाती है। वह संख्या ज्ञात कीजिए।

8. महेन्द्र 5600 रु० का कुछ भाग 3% वार्षिक ब्याज की दर से तथा शेष भाग 5% वार्षिक ब्याज की दर से जमा कराता है। यदि उसका एक वर्ष का कुल ब्याज 275.80 रु० था, तो उसने प्रत्येक दर पर कितना कितना रुपया जमा कराया?

9. एक शतरंज प्रतियोगिता में तीन पुरस्कार इस प्रकार दिए जाते हैं कि उनका कुल योग 150 रु० है। यदि दूसरे पुरस्कार का मूल्य पहले पुरस्कार के मूल्य का $\frac{5}{6}$ है तथा तीसरे पुरस्कार का मूल्य दूसरे पुरस्कार के मूल्य का $\frac{4}{5}$ है, तो तीनों पुरस्कारों में से प्रत्येक का मूल्य ज्ञात कीजिए।

*10. एक डाकिया डाकघर से एक गाँव तक पहुँचने में 35 मिनट लेता है। जब वह डाक देकर वापिस लौटता है तो वह अपनी चाल 0.6 कि० मी०/घंटा बढ़ा देता है और डाकघर तक पहुँचने में 30 मिनट लेता है। डाकघर और गाँव के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए। डाकिए की दोनों चालें भी ज्ञात कीजिए।

7.5 परिमेय संख्याओं के रूप में दशमलव

हम अनुच्छेद 5.3 में देख चुके हैं कि एक परिमेय संख्या को एक सांत अथवा एक असांत आवर्ती दशमलव के रूप में निरूपित किया जा सकता है। इसके विलोम के बारे में आप क्या सोचते हैं?

मान लीजिए कि हमारे पास एक सांत दशमलव, उदाहरणार्थ, 0.23 है। क्या हम एक ऐसी परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं जिसका दशमलव निरूपण 0.23 है? आप यह अवश्य ही जानते हैं कि

$$0.23 = \frac{2}{10} + \frac{3}{100} = \frac{23}{100}$$

[क्या अब आप एक दशमलव को परिमेय संख्या में बदलने के नियम का कारण देख रहे हैं? क्या आपको यह नियम याद है? नियम है कि आप हर में 1 लिखते हैं और उसमें दशमलव बिंदु के दाईं ओर जितने अंक है उतने शून्य लगा देते हैं। अंश में आप दी हुई संख्या को बिना दशमलव बिंदु के लिखते है।]

आइए एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : निम्न में से प्रत्येक को एक परिमेय संख्या में बदलिए:

0.00573, 28.321, −6.0607

हल : हम नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं:

$$0.00573 = \frac{573}{100000}$$

$$28.321 = \frac{28321}{1000}$$

$$-6.0607 = -\frac{60607}{10000}$$

अब मान लीजिए हमारे पास एक असांत आवर्ती दशमलव, उदाहरणार्थ, 0.333 . . . है। हम वह परिमेय संख्या किस प्रकार ज्ञात करें जिसका दशमलव

निरूपण $0.\bar{3}$ है ? स्पष्ट है कि उस नियम का जो हमने सांत दशमलवों के लिए सीखा है यहाँ प्रयोग नहीं किया जा सकता।

आइए दिए हुए आवर्ती दशमलव को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें।

अर्थात् मान लीजिए कि $x = 0.333\ldots$ (1)

हम देखते हैं कि दशमलव बिंदु के दाईं ओर केवल पुनरावृत्ति वाला अंक ही आ रहा है।

आइए (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$10x = 3.333\ldots \quad (2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$9x = 3$$

जिससे,

$$x = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

इस प्रकार, वांछित परिमेय संख्या $\frac{1}{3}$ है जिसका दशमलव निरूपण $0.\bar{3}$ होता है।

टिप्पणी : ध्यान दीजिए कि एक दिए हुए असांत आवर्ती दशमलव निरूपण वाली परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए हम एक चर में प्रथम घात समीकरणों के ज्ञान का उपयोग करते हैं।

आइए कुछ और उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका दशमलव निरूपण $2.\overline{34}$ है।

हल : मान लीजिए कि $y = 2.343434\ldots$ (1)

हम देखते हैं कि दक्षिण पक्ष में दशमलव बिंदु के बाद दो अंकों के समूह की पुनरावृत्ति हो रही है। अतः दोनों पक्षों को केवल 10 से गुणा करने से कुछ अधिक सहायता नहीं मिलेगी। (क्यों ?)

हम (1) के दोनों पक्षों को 10^2 (अर्थात् 100) से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$100y = 234.343434\ldots \qquad (2)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$99y = 232$$

जिससे, $$y = \frac{232}{99}$$

इस प्रकार, $\frac{232}{99}$ वह वांछित परिमेय संख्या है जिसका दशमलव निरूपण $2.\overline{34}$ है।

उदाहरण 3 : वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए जिसका दशमलव निरूपण $5.0\overline{4}$ है।

हल मान लीजिए कि $y = 5.04444\ldots \qquad (1)$

हम पहले (1) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करते हैं ताकि दशमलव बिन्दु के दाईं ओर केवल पुनरावृत्ति वाला अंक ही रहे। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$10y = 50.4444\ldots \qquad (2)$$

हम पुनः (2) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$100y = 504.4444\ldots \qquad (3)$$

(3) में से (2) को घटाने पर,

$$90y = 454$$

जिससे, $$y = \frac{454}{90} = \frac{227}{45}$$

इस प्रकार, $\frac{227}{45}$ वह वांछित परिमेय संख्या है जिसका दशमलव निरूपण $5.0\overline{4}$ है।

प्रश्नावली 7.3

1. निम्न दशमलवों को निम्नतम पदों की परिमेय संख्याओं में बदलिए :

(i) 2.78 (ii) 0.1325

(iii) 27.0892 (iv) 10.1010

(v) 0.000025 (vi) 92.091

(vii) 5003.5003

2. निम्नतम पदों की वे परिमेय संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनके दशमलव निरूपण निम्न हैं :

(i) $8.\bar{3}$ (ii) $12.\bar{6}$

(iii) $0.0\bar{1}$ (iv) $5.6\bar{5}$

(v) 3.27 (vi) $29.\overline{87}$

(vii) 0.0525 (viii) 0.0027

*(ix) 2.0101

मुख्य संकल्पनाएँ

एक चर में प्रथम घात समीकरण

समीकरणों को हल करने के नियम

पक्षान्तर स्थानापन्न करना

सांत दशमलव को परिमेय संख्या में बदलना

दिए हुए असांत आवर्ती दशमलव निरूपण वाली परिमेय संख्या ज्ञात करना

एकक VIII

असमिकाएँ और एक चर में प्रथम घात असमीकरण

इस एकक में हम असमिकाओं और उनके गुणों का अध्ययन करेंगे। हम सीखेंगे कि एक चर में, परिमेय गुणांकों वाली, प्रथम घात असमीकरणों को किस प्रकार हल किया जाता है। असमीकरण की तुलना एक झुकी हुई तुला से की गई है, जिसका असमीकरणों को हल करने के लिए नियम ज्ञात करने में अभिप्रेरण के रूप में प्रयोग किया गया है।

8.1 असमिकाएँ क्या हैं?

हम अनुच्छेद 3.5 में पढ़ चुके हैं कि परिमेय संख्याओं की तुलना किस प्रकार की जाती है। उदाहरणार्थ, दो परिमेय संख्याओं r और s पर विचार कीजिए। तब, या तो

(*i*) r, s के *बराबर* है, (हम इसे $r = s$ लिखते हैं), या

(*ii*) r, s से *बड़ा* है, (हम इसे $r > s$ लिखते हैं), या

(*iii*) r, s से *छोटा* है, (हम इसे $r < s$ लिखते हैं)।

केवल उपर्युक्त तीन सम्भावनाएँ ही हो सकती हैं।

ऐसा कथन कि एक राशि दूसरी राशि से छोटी है अथवा बड़ी है एक असमिका (inequality) कहलाता है। r, s से बड़ा है (जिसे $r > s$ लिखा जाता

है), r, s से छोटी है (जिसे $r < s$ लिखा जाता है) असमिकाओं के कथन हैं। इनके कुछ अन्य उदाहरण निम्न हैं

$$\frac{2}{3} < 5,\ 4 < \frac{21}{4},\ -12 > -\frac{33}{2},$$ इत्यादि।

अब हम असमिकाओं के कुछ महत्त्वपूर्ण गुणों का अध्ययन करते हैं।

8.2 असमिकाओं के गुण

हम पहले देखते हैं कि असमिका $a < b$ असमिका $b > a$ के समान है। इसलिए हम संकेत 'से छोटा है' से संबद्ध असमिकाओं के गुणों का ही उल्लेख करेंगे। आगे आने वाली चर्चा में $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ परिमेय संख्याओं को व्यक्त करेंगे।

गुण I : असमिका के दोनों पक्षों में एक ही परिमेय संख्या जोड़ने (या घटाने) से उसकी दिशा* (direction) में कोई परिवर्तन नहीं होता।

उदाहरणार्थ, निम्न असमिका पर विचार कीजिए

$$\frac{23}{12} < \frac{35}{8} \qquad (1)$$

आइए, असमिका के दोनों पक्षों में एक परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, $\frac{1}{4}$ जोड़ें। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{23}{12} + \frac{1}{4} = \frac{26}{12}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{35}{8} + \frac{1}{4} = \frac{37}{8}$$

*किसी असमिका की दिशा से हमारा तात्पर्य असमिका संकेत की नोक की दिशा से है।

हम देखते हैं कि $\frac{26}{12} < \frac{37}{8}$ है। (क्यों?) दी हुई असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है।

आइए, पुनः (1) को लें और उसके दोनों पक्षों में से एक परिमेय संख्या, उदाहरणार्थ, 3 घटाएँ। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\text{वाम पक्ष} = \frac{23}{12} - 3 = -\frac{13}{12}$$

$$\text{दक्षिण पक्ष} = \frac{35}{8} - 3 = \frac{11}{8}$$

हम देखते हैं कि $-\frac{13}{12} < \frac{11}{8}$ है। पुनः दी हुई असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है।

चिह्नों और संकेतों का प्रयोग करते हुए, हम गुण I को निम्न प्रकार लिखते हैं :

$$\text{यदि } \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, \text{ तो } \frac{a}{b} + \frac{e}{f} < \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$$

अब हम एक अन्य गुण का अध्ययन करते हैं।

गुण II : किसी असमिका के दोनों पक्षों को एक ही धनात्मक परिमेय संख्या से गुणा (या भाग) करने पर उसकी दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता।

उदाहरणार्थ, निम्न असमिका पर विचार कीजिए :

$$-\frac{3}{2} < -\frac{1}{3} \qquad (2)$$

हम देखते हैं कि $-\frac{1}{4} > -\frac{27}{70}$ है। पुनः दी हुई असमिका की दिशा उलट गई है।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग करते हुए हम गुण III को निम्न प्रकार से लिखते हैं :

यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ और यदि $\frac{e}{f}$ एक धनात्मक परिमेय संख्या है, तो

$$\frac{a}{b}\left(-\frac{e}{f}\right) > \frac{c}{d}\left(-\frac{e}{f}\right)$$

अन्त में, हम असमिकाओं के एक और गुण का अध्ययन करते हैं।

गुण IV: यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ तथा $\frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, तो $\frac{a}{b} < \frac{e}{f}$ ।

उदाहरणार्थ, असमिकाओं $\frac{1}{2} < \frac{2}{3}$ और $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ पर विचार कीजिए।
तब गुण IV हमें बताता है कि

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4},$$

जोकि वास्तव में सत्य है, क्योंकि $(1 \times 4) < (2 \times 3)$ ।

उपर्युक्त गुण, < का संक्रामिता गुण (transitivity property) कहलाता है। परन्तु यह नाम उतना महत्वपूर्ण नहीं है। जो महत्वपूर्ण है वह यह याद रखना कि यदि एक संख्या एक अन्य संख्या से छोटी है और यह दूसरी संख्या किसी तीसरी संख्या से छोटी है, तो पहली संख्या तीसरी संख्या से छोटी होती है।

[पाठक को चाहिए कि वह > के लिए गुण IV को लिखे।]

हम नीचे एक परिणाम, जिससे आप पहले से ही परिचित हैं, सिद्ध कर रहे हैं। परिणाम है कि दो धनात्मक परिमेय संख्याओं का योग भी धनात्मक होता है। हमें किस प्रकार प्रारम्भ करना चाहिए ? आइए परिमेय संख्याओं को, उदाहरणार्थ,

r और s से व्यक्त करें। हमें दिया हुआ है कि $r > 0$ और $s > 0$ है तथा हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $r + s > 0$।

हम निम्न असमिका से प्रारम्भ करते हैं :

$$r > 0 \qquad (4)$$

हम इसके दोनों पक्षों में s जोड़ते हैं। गुण I हमें यह बताता है कि यदि हम ऐसा करेंगे तो असमिका की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

अर्थात्, $r+s > 0+s$

अथवा, $r+s > s \qquad (5)$

परन्तु हमें यह भी दिया है कि

$$s > 0 \qquad (6)$$

(5) और (6) मिलकर यह बताते हैं कि

$$r+s > s \text{ तथा } s > 0$$

अतः, $>$ के संक्रामिता गुण से,

$$r+s > 0$$

इससे परिणाम सिद्ध हो जाता है।

प्रश्नावली 8.1

1. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ परिमेय संख्याएँ हैं तथा $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, तो

   $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} > \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$।

   उपर्युक्त गुण को शब्दों में व्यक्त कीजिए।

2. बिना परिकलित किए बताइए कि निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं तथा कौन-

कौन असत्य । सकारण उत्तर दीजिए ।

(*i*) क्योंकि $\frac{7}{3} \cdot \frac{13}{4}$, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{7}{3}+\frac{125}{128} \cdot \frac{13}{4} + \frac{125}{128} \text{ ।}$$

(*ii*) क्योंकि $\frac{16}{5} \quad \frac{94}{21}$, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{16}{5} \quad \frac{54}{5} \quad \frac{94}{21} - \frac{54}{5} \text{ ।}$$

(*iii*) क्योंकि 29.382 29.381, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि $29.382+\frac{21}{40} \cdot 29.381+\frac{21}{40}$ ।

(*iv*) क्योंकि $-3 \quad \frac{11}{2}$, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$-3 - \frac{25}{7} \cdot \frac{11}{2} - \frac{26}{7} \text{ ।}$$

3. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ ऐसी परिमेय संख्याएँ हैं कि $\frac{e}{f} > 0$ तथा यदि $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ तो, $\frac{a}{b}\left(\frac{e}{f}\right) < \frac{c}{d}\left(\frac{e}{f}\right)$

उपर्युक्त गुण को शब्दों में व्यक्त कीजिए ।

4. इस तथ्य की सत्यता की जाँच के लिए दो उदाहरण दीजिए कि यदि $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ और $\frac{e}{f}$ ऐसी परिमेय संख्याएँ है कि $\frac{e}{f} > 0$ तथा यदि $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, तो $\frac{a}{b}\left(-\frac{e}{f}\right) \cdot \frac{c}{d}\left(-\frac{e}{f}\right)$ ।

उपर्युक्त गुण को शब्दों मे व्यक्त कीजिए ।

5. बिना परिकलन किए बताइए कि निम्न में से कौन-कौन सत्य हैं तथा कौन-कौन असत्य। सकारण उत्तर दीजिए।

(i) क्योंकि $\frac{13}{7} \quad \frac{9}{4}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{13}{7}\left(\frac{251}{694}\right) \quad \frac{9}{4}\left(\frac{251}{694}\right)।$$

(ii) क्योंकि $\frac{9}{5} > -\frac{7}{6}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{9}{5}\left(\frac{43}{13}\right) < \left(-\frac{7}{6}\right)\left(\frac{43}{13}\right)।$$

(iii) क्योंकि 83.05 83.5, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(83.05) \div \left(\frac{19}{6}\right) \quad (83.5) \div \left(\frac{19}{6}\right)।$$

(iv) क्योंकि $-\frac{5}{16} \quad \frac{4}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{5}{16} \quad \frac{4}{5}।$$

(v) क्योंकि $-\frac{5}{16} \quad -\frac{4}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{5}{16} \quad \frac{4}{5}।$$

6. क्या यह सत्य है कि

$$\frac{1}{4} - \frac{2}{3} \quad \frac{1}{3} - \frac{2}{3}?$$

सकारण उत्तर दीजिए।

8.3 असमीकरण

शशि अपनी कक्षा के एक गणित के टैस्ट में बैठती है। प्रश्न-पत्र में कुल 20 अंकों के 5 प्रश्न हैं। हम उसके द्वारा प्राप्त किए हुए अंकों के बारे में क्या कह सकते हैं? [यह ज्ञात है कि अंक केवल पूर्ण संख्याओं में दिए गए हैं तथा 20 अंक किसी ने भी प्राप्त नहीं किए हैं।]

आइए शशि द्वारा प्राप्त अंकों को, उदाहरणार्थ, x से व्यक्त करें। तब x, 0 या 1 या 2 या 3, इत्यादि के बराबर हो सकता है। परन्तु x, 20 के बराबर नहीं हो सकता। गणितीय रूप से हम कहते हैं कि

$$x < 20$$

तथा इसे 'x, 20 से छोटा है' पढ़ते हैं।

अब मान लीजिए कि कुछ विद्यार्थी 20 अंक भी प्राप्त करते हैं। यह संभव है कि शशि भी इन विद्यार्थियों में से एक हो। इस स्थिति में x, 20 के बराबर भी हो सकता है। गणितीय रूप से हम कहते हैं कि

$$x \leq 20$$

और इसे 'x, 20 से छोटा अथवा उसके बराबर है' पढ़ते हैं।

हरि को लम्बी कूद (long jump) में अपने स्कूल का प्रतिनिधित्व करना है। सफल होने के लिए उसे कम से कम 3.5 मीटर अवश्य कूदना चाहिए। यदि हरि को जितनी दूरी (मीटर में) कूदनी चाहिए उसे हम, उदाहरणार्थ, y से व्यक्त करें, तो हमें निम्न स्थिति प्राप्त होती है :

$$y \geq 3.5$$

हम इसे 'y, 3.5 से बड़ा अथवा उसके बराबर है' पढ़ते हैं।

$$x < 20, \quad x \leq 20, \quad y \geq 3.5$$

असमीकरणों (inequations) के उदाहरण हैं। x (या y) असमीकरण का अज्ञात (unknown) अथवा चर (variable) कहलाता है। [समीकरणों की तरह असमीकरणों में भी चर को x या y या z या u, इत्यादि से व्यक्त करते हैं। इसके लिए अंग्रेजी वर्णमाला के अंतिम भाग के अक्षरों को प्राथमिकता दी जाती है।]

असमिका का वह कथन जिसमें कोई अज्ञात राशि निहित हो असमीकरण कहलाता है। यह अज्ञात राशि, असमीकरण का चर (variable) कहलाती है। यदि चर की घात 1 हो तो हम कहते है कि असमीकरण प्रथम घात का है।

इस पुस्तक में हम एक चर में प्रथम घात की असमीकरणों का अध्ययन करेंगे। ऐसी असमीकरणों के कुछ उदाहरण निम्न हैं :

$2x+1<4$, $3-y>-2+y$, $2.5z+7.5\geq 3.5$,

$-\frac{1}{2}x+4<\frac{3}{4}x-3$, इत्यादि।

एक असमीकरण के भी (एक समीकरण की तरह) दो पक्ष (sides) अर्थात् वाम पक्ष (left-hand side जिसे L.H.S भी लिखते हैं) तथा दक्षिण पक्ष right-hand side जिसे R.H.S भी लिखते है) होते हैं।

जब किसी संख्या को किसी असमीकरण में अज्ञात के स्थान पर प्रतिस्थापित करने पर उसकी दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता, तो हम कहते हैं कि वह संख्या उस असमीकरण को संतुष्ट करती है। साथ ही, यह संख्या असमीकरण का एक हल कहलाती है।

उदाहरणार्थ, असमीकरण

$$2x+1<4 \qquad (1)$$

पर विचार कीजिए। निश्चय ही, यदि हम इस असमीकरण में $x=0$ प्रतिस्थापित करें तो हम देखते है कि इससे असमीकरण की दिशा में कोई परिवर्तन नही होता। क्योंकि जब $x=0$, वाम पक्ष $=2(0)+1=1$ और $1<4$ है अर्थात् वाम पक्ष < दक्षिण पक्ष है। इस प्रकार, $x=0$ असमीकरण का एक हल है।

$x=1$ के बारे मे आप क्या सोचते है ? पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि $x=1$ भी उपर्युक्त असमीकरण का एक हल है।

इस असमीकरण के कुछ और हल, $x=-\frac{1}{4}$, $x=-\frac{1}{2}$, $x=-1$, $x=-\frac{5}{4}$, $x=-10$, इत्यादि हैं।

हम देखते हैं कि एक चर में प्रथम घात असमीकरण के एक से अधिक हल हो सकते हैं जबकि एक चर में प्रथम घात समीकरण का एक ही हल होता है।

आइए पुनः (1) को लें और देखें कि $x=2$ की स्थिति में क्या होता है। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\text{वाम पक्ष}=2(2)+1=5$$

हम देखते हैं कि अब वाम पक्ष, दक्षिण पक्ष से बड़ा है। दूसरे शब्दों में, जब $x=2$, तो असमीकरण की दिशा उलट जाती है। हम कहते हैं कि $x=2$ असमीकरण का हल नहीं है। क्या $x=\frac{3}{2}$ एक हल है ? नहीं। (क्यों ?)

किसी असमीकरण के हल ज्ञात करने के लिए प्रयत्न और भूल (trial and error) की इस प्रक्रिया में अधिक समय लगता है और, जैसा कि हम देखेंगे, यह अनावश्यक भी है। हम सुगमतापूर्वक और शीघ्रता से हल ज्ञात करने के लिए बीजगणित के ज्ञान का उपयोग कर सकते हैं। असमीकरण के हल ज्ञात करने की विधि उस असमीकरण को हल करना कहलाती है। हम इस विधि का अगले अनुच्छेद में अध्ययन करेंगे।

8.4 असमीकरण का हल करना

असमीकरण की एक झुकी हुई तुला से तुलना की जा सकती है। इसके दोनों पक्ष, दोनों पलड़े हैं। असमिका संकेत (inequality symbol) तुला की भुजा के

झुकाव की दिशा बताता है। (देखिए आकृति 8.1)



वाम पक्ष दक्षिण पक्ष

आकृति 8.1

आइए एक तुला, जिसकी भुजा बाईं ओर को झुकी है (देखिए आकृति 8.1), के कार्य को देखें। यदि हम इसके दोनों पलड़ों में एक ही भार जोड़ें या उनमें से एक ही भार घटाएँ, तो झुकाव की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता। पुनः यदि हम प्रत्येक पलड़े की वस्तुओं के स्थान पर उनका एक ही भाग या भिन्न रखें (अर्थात् एक ही धनात्मक परिमेय संख्या से गुणा या भाग करें), तो झुकाव की दिशा में कोई परिवर्तन नहीं होता।

ठीक यही हम असमीकरणों को हल करने में करेंगे। दूसरे शब्दों में, किसी असमीकरण को हल करने के लिए हम

1. असमीकरण के दोनों पक्षों में एक ही परिमेय संख्या जोड़ सकते हैं,
2. असमीकरण के दोनों पक्षों में से एक ही परिमेय संख्या घटा सकते हैं,
3. असमीकरण के दोनों पक्षों को एक ही धनात्मक परिमेय संख्या से गुणा कर सकते हैं,
4. असमीकरण के दोनों पक्षों को एक ही धनात्मक परिमेय संख्या से भाग दे सकते हैं।

अब हम इन नियमों का उपयोग करेंगे और कुछ असमीकरण हल करेंगे।

उदाहरण 1. : $2x+1<4$ को हल कीजिए।

हल : हम असमीकरण के दोनों पक्षों में से 1 घटाते हैं (नियम 2)। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2x+1-1<4-1$$

अर्थात्, $2x<3$ (*i*)

अब हम (*i*) के दोनों पक्षों को 2 से भाग देते हैं (नियम 4)। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$x<\frac{3}{2}$$

इस प्रकार x का कोई भी मान, जो $\frac{3}{2}$ से छोटा है, दी हुई असमीकरण का एक हल है। x के ऐसे अनेक मान हैं। क्या आप ऐसे दो मान बता सकते हैं?

उदाहरण 2 : $2.5z+7.5>3.5$ को हल कीजिए।

हल : हम 7.5 को दक्षिण पक्ष में ले आते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं

$$2.5z>3.5-7.5$$

अर्थात्, $2.5z>-4.0$ (*ii*)

अब हम (*ii*) के दोनों पक्षों को 2.5 से भाग देते हैं तथा निम्न प्राप्त करते हैं :

$$z>-\frac{4.0}{2.5}$$

अर्थात्, $z>-1.6$

इस प्रकार, -16 से बड़ा या उसके बराबर x का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। x के ऐसे अनेक मान हैं। क्या आप ऐसे दो मान बता सकते हैं? ऐसे दो मान भी बताइए जो दी हुई असमीकरण के हल नहीं हैं।

उदाहरण 3 : $\frac{1}{2}x + 4 \leqslant \frac{3}{4}x - 3$ को हल कीजिए।

हल : हम $\frac{3}{4}x$ को वाम पक्ष में तथा 4 को दक्षिण पक्ष में ले जाते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x \leqslant -3 - 4$$

अर्थात्, $$-\frac{1}{4}x \leqslant -7 \qquad (iii)$$

अब हम (*iii*) के दोनों पक्षों को 4 से गुणा करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$-x \leqslant -28 \qquad (iv)$$

परन्तु हम इसे x के लिए हल करना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में, हम x के ($-x$ के नहीं) वे मान ज्ञात करना चाहते हैं जो दी हुई असमीकरण को सन्तुष्ट करते हैं। इसलिए, (*iv*) में हम $-x$ को दक्षिण पक्ष में तथा -28 को वाम पक्ष में ले जाते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$28 \leqslant x,$$

जो कि निम्न के समान है

$$x \geqslant 28$$

इस प्रकार, 28 से बड़ा या उसके बराबर x का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। पुनः x के ऐसे अनेक मान हैं।

[क्या आपको असमिकाओं के गुण III कि 'असमिका के दोनों पक्षों को एक ही ऋणात्मक परिमेय संख्या से गुणा (या भाग) करने से उसकी दिशा उलट जाती है' के बारे में याद है? जब हमें असमीकरण (*iii*) प्राप्त हो जाए तब हम असमिकाओं के उपर्युक्त गुण का प्रयोग कर सकते हैं और हल ज्ञात करने में एक पग तथा सम्भवतः कुछ समय की बचत कर सकते हैं। आइए देखें कैसे?

हम (*iii*) के दोनों पक्षों को −4 से यह ध्यान में रखते हुए गुणा करते हैं कि इसकी दिशा अवश्य उलट जानी चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-4\left(-\frac{1}{4}\right)x \geq (-4)(-7)$$

अर्थात्, $x \geq 28$ ।

उदाहरण 4 : हल कीजिए

$$2y + \frac{1}{2} \geq 5y + \frac{1}{2}(y - 4)$$

हल यहाँ हम दक्षिण पक्ष के कोष्ठक हटा कर सरल करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$2y + \frac{1}{2} \geq 5y + \frac{1}{2}y - 2$$

अर्थात्, $2y + \frac{1}{2} \geq \frac{11}{2}y - 2$ (*v*)

(*v*) में $\frac{11}{2}y$ को वाम पक्ष तथा $\frac{1}{2}$ को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर,

$$2y - \frac{11}{2}y \geq -2 - \frac{1}{2}$$

अर्थात्, $-\frac{7}{2}y \geq -\frac{5}{2}$ (*vi*)

अब (*vi*) के दोनों पक्षों को $-\frac{2}{7}$ से गुणा करने पर [याद रखिए कि असमीकरण की दिशा उलट जाएगी], हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$y \leq \left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)$$

अर्थात्, $y \leq \frac{5}{7}$

इस प्रकार, $\frac{5}{7}$ से छोटा y का कोई भी मान दी हुई असमीकरण का एक हल है। y के ऐसे अनेक मान है। क्या आप ऐसे दो मान बता सकते हैं ? ऐसे दो मान भी बताइए जो दी हुई असमीकरण के हल नहीं हैं।

उदाहरण 5 : ऐसी असमीकरण बनाइए कि संख्याओं $\frac{1}{4}$, -3 और $\frac{5}{4}$ में से प्रत्येक उस असमीकरण का एक हल हो।

हल : आइए पहले संख्याओं को आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। आरोही क्रम में ये निम्न प्रकार है

$$-3, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}$$

निश्चय ही, $y \leqslant \frac{5}{4}$ ऐसा असमीकरण है जिसका तीनों दी हुई संख्याओं में से प्रत्येक एक हल है।

क्या आप ऐसी कुछ अन्य असमीकरणों के बारे में सोच सकते है ? $y \leqslant 2$ या $y < 2$ या $y < \frac{25}{3}$ के बारे में आप क्या कह सकते है ?

$y \geqslant -3$, $y > -4$, $y \geqslant -4$ और $y > -\frac{9}{2}$ के बारे में आप क्या सोचते हैं ?

हम देखते हैं कि हम ऐसे अनेक असमीकरण बना सकते हैं जिनका संख्याओं $\frac{1}{4}$, -3 और $\frac{5}{4}$ में से प्रत्येक एक हल है।

प्रश्नावली 8.2

1 (क) क्या $\frac{5}{3}$ असमीकरण $\frac{3}{4}x - \frac{4}{3} \geq 0$ का एक हल है ?

(ख) क्या $\frac{7}{6}$ असमीकरण $\frac{7}{9}(x-2) : \frac{2}{3}$ का एक हल है ?

2 निम्न मे से कौन से कथन सत्य हैं ?

(क) $\frac{10}{3}$ असमीकरण $2x+3 \leq 10$ का एक हल है।

(ख) 3 असमीकरण $9x+3 \geq 27$ का एक हल है।

(ग) $\frac{25}{4}$ असमीकरण $20 - 4x \quad 7$ का एक हल है।

3 एक ऐसा असमीकरण बनाइए जिसका तीन संख्याओं -1, $\frac{3}{2}$ और 2 में से प्रत्येक एक हल हो।

4 असमीकरण $\frac{7}{3}y - 1 \quad 17 - \frac{2}{3}y$ के पूर्ण संख्याओं में हल ज्ञात कीजिए।

5 निम्न असमीकरणो में से प्रत्येक को हल कीजिए :

(i) $7x \quad 14 \leq 0$ (ii) $2y + 7 \quad 15$

(iii) $2-3y \leq 2y + 12$ (iv) $3x + \frac{1}{2} \geq \frac{x}{4} + 5$

(v) $x + 6 \quad 4 - 3x$ (vi) $2x - 3 \leq 5x + 7$

(vii) $4.5z - \frac{1}{2} \quad -3.5z + \frac{1}{2}$ (viii) $\frac{5}{2} - \frac{4}{3}x \leq -\frac{7}{2} - \frac{10}{3}x$

6 क्या $z = -5.1$ असमीकरण $-2.5z + 6.8 \leq -18.7 - 3z$ का एक हल है ?

7 निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए

(i) $\frac{2y-3}{3} - \frac{y-3}{2} > \frac{6}{5}$ (ii) $\frac{1}{2}(x+5) > 3 + \frac{1}{4}(x+1)$

(iii) $\frac{y-2}{4} - \frac{y-4}{6} > \frac{2}{3}$ (iv) $\frac{x+4}{4} - \frac{3x-9}{7} < \frac{1}{2}$

(v) $\frac{y}{2} - \frac{y}{3} - \frac{1-y}{6} \leq 0$ (vi) $\frac{4y+1}{3} + \frac{2(y+1)}{3} - y > 6$

(vii) $\frac{2}{3}\left[3x-(4-3x)\right] + \frac{1}{3}(8-9x) > 3 - 2x$

*8. वे पूर्णांक लिखिए जो दोनों असमीकरणों $1 - x < \frac{3}{2}$ तथा $2x < 8$ के हल हैं।

मुख्य संकल्पनाएं

असमिकाएं और उनके गुण	असमीकरण का हल
असमिका की दिशा	असमीकरण हल करने के लिए नियम
असमीकरण	

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII और VIII पर)

1. निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण लिखिए। बताइए कि निरूपण सांत दशमलव है या असांत आवर्ती दशमलव।

(i) $\frac{3}{16}$ (ii) $-\frac{18}{125}$

(iii) $-\frac{15}{7}$ (iv) $\frac{141}{320}$

(v) $\frac{5}{12}$ (vi) $-\frac{9}{64}$

2. दिखाइए कि निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण सांत है :

(i) $\frac{26}{25}$ (ii) $-\frac{95}{128}$

(iii) $-\frac{128}{125}$ (iv) $\frac{15}{16}$

(v) $\frac{87}{125}$

3. दिखाइए कि निम्न में से प्रत्येक परिमेय संख्या का दशमलव निरूपण असांत आवर्ती है

(i) $\frac{5}{27}$ (ii) $-\frac{16}{45}$

(iii) $\frac{37}{24}$ (iv) $-\frac{4}{3}$

*4. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{3}{25}$ (ii) $\frac{11}{16}$ (iii) $\frac{7}{40}$

*5. निम्न में से प्रत्येक का दशमलव के 5 स्थानों तक दशमलव निरूपण ज्ञात कीजिए। अनुच्छेद 5.2 की विधि का प्रयोग कीजिए। (लम्बी विभाजन विधि का प्रयोग नहीं कीजिए।)

(i) $\frac{3}{104}$ (ii) $\frac{435}{5128}$ (iii) $\frac{951}{900}$

6. निम्न में से कौन-कौन से बीजीय व्यंजक बहुपद हैं?

(i) $\frac{4}{3} - 5x$ (ii) $3x^2 - \frac{7}{4}x^4 + 8$

(iii) $\dfrac{\frac{7}{4}y - 4y^4 - 1}{3y + \frac{5}{2} - 2y^2}$ (iv) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{5y} + 3$

(v) $\frac{3}{8}x - \frac{5}{3}x^3 + 11x^4 - x^2 + 21$ (vi) $29x^3$

7. निम्न एकपदियों में से प्रत्येक की घात लिखिए :

(i) $-\frac{17}{2}$ (ii) $\frac{15}{8}x^3$

(iii) $\frac{12}{19}y^{100}$ (iv) $\frac{13}{18}z$

(v) $9y^{10}$ (vi) $23z^5$

8. एक चर में दो ऐसे बीजीय व्यंजकों के उदाहरण दीजिए जो बहुपद नहीं हैं।

9. निम्न एकपदियों को उनकी घातों के आरोही क्रम में लिखिए :

$23x^4, \frac{7}{2}x^3, \frac{9}{7}x^5, -26, 0.8x^8$

10. निम्न एकपदियों को उनकी घातो के अवरोही क्रम में लिखिए :

$\frac{12}{11}y^7, \frac{-16}{13}y^6, -5y^{15}, 32, \frac{43}{21}y^3$

11. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक की घात ज्ञात कीजिए। प्रत्येक बहुपद को दुबारा इस प्रकार लिखिए कि उसके पद अपनी घातों के अवरोही क्रम में आएँ।

(i) $3y^2 - \frac{5}{8}y^3 + 5$

(ii) $\frac{13}{2} - 6y^4 + y^2 - \frac{2}{7}y^5$

(iii) $3.8x^5 - 2.5x^3 - 23x^2$

(iv) $16 - 25x^4 + \frac{16}{9}x^3 - \frac{5}{18}x^5 + \frac{3}{5}x^2$

12. निम्न में से प्रत्येक में योग ज्ञात कीजिए :

(i) $7y, -2y^4, \frac{7}{2}y, -2y^3, 8, \frac{1}{2}y^4$

(ii) $\frac{5}{9}x^5 - \frac{3}{5}x^4 + 5x^2 - 3, \frac{13}{9}x^5 + \frac{3}{5}x^4 - 5x^2 + 3$

(iii) $\frac{29}{3}x^7 + \frac{25}{16}x^4 - \frac{3}{8}x + 5, \frac{3}{8}x - \frac{25}{16}x^4 + 5 - \frac{29}{3}x^7$

(iv) $\frac{21}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 5, \frac{25}{4}x^3 + \frac{7}{8}x^2 - 13x + 9$

(v) $\frac{34}{13}x^4 - \frac{25}{16}x^2 - \frac{5}{3}, \frac{5}{13}x^4 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{3}{2} + 2x$

(vi) $7+\frac{2}{17}x^2 - \frac{4}{15}x^3, \frac{7}{15}x^3 - \frac{2}{17}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + 2$

13. घटाइए :

(i) $\frac{9}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ में से $7x - \frac{5}{2}x^3 + 3x^2 - \frac{2}{3}$

(ii) $\frac{8}{3}x^2 - 5 + \frac{7}{9}x^4 + x^3$ में से $\frac{2}{9}x^4 - \frac{5}{3}x^2 + 6$

(iii) $\frac{8}{13}x^3 - 3x + \frac{6}{11}x^2 + 2$ में से $\frac{-5}{11}x^2 - \frac{2}{13}x^3 - x$

(iv) $\frac{14}{5}x^5 - \frac{11}{18}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - 5$ में से $\frac{7}{18}x^3 + \frac{7}{5}x^5 - x^4 + 2$

(v) $\frac{6}{5}x^4 - \frac{13}{8}x^5 - \frac{5}{2}x^2 + 3$ में से $\frac{5}{8}x^5 - \frac{2}{5}x^4 + 2x$

14. जोड़िए :

(i) $\frac{13}{11}x^3 - \frac{12}{7}x^2 - 3, \frac{5}{7}x^2 - \frac{1}{11}x^3 - \frac{12}{5} + \frac{10}{3}x$ और

$\frac{5}{11}x^3 + \frac{2}{5} - \frac{1}{3}x$

(ii) $5x - \frac{7}{3}x^2 + \frac{2}{9}x^3, \frac{7}{2}x + \frac{5}{9}x^3 + x^4, -\frac{1}{2}x + \frac{10}{3}x^2,$

$-\frac{7}{9}x^3 + 5x^4$ और $6x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 2x^4$

(iii) $\frac{5}{19}x^5 - \frac{6}{13}x^2 + \frac{2}{3}x,\ \frac{1}{19}x^3 - \frac{8}{3}x + 5,\ \frac{15}{13}x^3 + \frac{19}{3}x + \frac{1}{2}$

और $-\frac{5}{19}x^5 + \frac{2}{13}x^2 + \frac{3}{2}$

(iv) $\frac{13}{5}x^4 + \frac{8}{9}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 3,\ \frac{19}{5}x^4 - \frac{11}{9}x^3 + \frac{5}{2} - 3x$ और

$-\frac{27}{5}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{17}{4}x^2 + 5x$

(v) $\frac{15}{8}x^5 - \frac{13}{6}x^4 - 6x^2 + 7,\quad \frac{5}{6}x^4 + \frac{6}{7}x^3 - 2x,$

$-\frac{7}{8}x^5,\ \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{7}x^3 + 4$ और $3x^5 - 5x + \frac{3}{2}$

15 समान पद एकत्रित कीजिए और जोड़िए :

(i) $\left(8 - \frac{3}{2}x^3 + 5x^4\right) + \left(\frac{7}{2}x^3 - \frac{5}{11}x^4 + \frac{8}{19}x\right)$

$+\left(7 - \frac{16}{11}x^4 + \frac{9}{2}x^3\right) - \left(2x^5 - \frac{6}{19}x - 2\right)$

(ii) $\left(\frac{3}{17}x^5 - \frac{8}{5}x^3 - x^4 + 1\right) - \left(\frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{2}x^4 - 3\right)$

$-\left(\frac{19}{5}x^3 + \frac{12}{17}x^5 - x^4\right) + \left(5x^5 - 4 + \frac{2}{9}x\right)$

(iii) $\left(\frac{7}{6}x^4 - \frac{2}{11}x^3 - \frac{5}{4}x + 1\right) - \left(\frac{3}{4}x + 2 - \frac{17}{6}x^4\right)$

$-\left(\frac{5}{11}x^3 + \frac{7}{4}x + 3\right) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{11}x^3 - \frac{5}{2}\right)$

(iv) $\left(\frac{5}{8}x^5 - 3x^4 + \frac{11}{3}x - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{8}x^5 - \frac{7}{2}x^4 - \frac{11}{3}x\right)$

$- \left(\frac{13}{2}x^5 - \frac{13}{2}x^4 + \frac{9}{5}\right) - \left(\frac{4}{3}x + x^2 - 2\right)$

16 $\left(5x^3 - \frac{2}{7}x^4 - 3x^2 + 5\right)$ और $\left(7x^3 - \frac{8}{7}x^4 + \frac{3}{2}x^2\right)$ के योग में से $\left(11 - \frac{8}{11}x^3 + \frac{3}{7}x^4\right)$ और $\left(2 + \frac{8}{7}x^4 + \frac{8}{11}x^3 - x^2\right)$ का योग घटाइए।

17 $\frac{8}{5}x - 3x^3 + 4$, $\frac{4}{7}x^4 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{13}{5}x$ और $13 - \frac{7}{5}x + \frac{3}{7}x^4$ के योग में से $\frac{18}{7}x^4 - \frac{21}{5}x - 9$ और $\frac{11}{2}x^3 + \frac{1}{5}x - 3$ का योग घटाइए।

18 P बहुपद $\frac{5}{11}x^5 - \frac{3}{13}x^3 + 2x - 3$ को, Q बहुपद $\frac{7}{13}x^3 - \frac{8}{9}x^2 - 5x - \frac{3}{2}$ को, R बहुपद $\frac{15}{11}x^5 + \frac{2}{9}x^2 + \frac{3}{2}x$ को तथा S बहुपद $\frac{9}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{11}x^5 + \frac{1}{13}x^3$ को व्यक्त करता है। परिकलित कीजिए :

(i) $3P$

(ii) $P - Q + R - S$

19. $\frac{15}{13}x^4 - x^2 + \frac{3}{2}x^5 + 2$ प्राप्त करने के लिए $3x^5 - \frac{12}{13}x^4 - \frac{8}{5}x + 3$ में क्या जोड़ना चाहिए ?

20. $\frac{3}{5}x^3 - \frac{7}{8}x^2 + 1 - \frac{2}{19}x^4 + x^5$ प्राप्त करने के लिए $\frac{6}{19}x^4 - \frac{13}{5}x^2 + \frac{5}{8}$ में से क्या घटाना चाहिए ?

21. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का उसके सम्मुख दिए चर के मानों पर मान ज्ञात कीजिए :

(i) $4x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$ का $x = 0, 2, -2$ पर

(ii) $\frac{1}{9}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + x + 8$ का $x = 3, -3$ पर

(iii) $\frac{x^4}{5} - \frac{2}{5}x^3 + \frac{18}{5}x^2 - 3$ का $x = 1, 5, -5$ पर

*(iv) $\frac{3}{2}x^5 - \left[5x^3 - \frac{7}{4}x^4 - 2x\left(3 - \frac{1}{2}x^2\right)\right]$ का $x = 1$ पर

22. बहुपद $\frac{1}{4}(x^4 + 2x^3 + x^2)$ का $x = 5$ पर मान ज्ञात कीजिए और जाँच कीजिए कि आपका उत्तर प्रथम पाँच धनपूर्णांकों के घनों के योग के बराबर है।

23. निम्न बहुपदों में से प्रत्येक का शून्य ज्ञात कीजिए

(i) $\frac{1}{8}x+8$ (ii) $\frac{11}{8}-\frac{3}{2}x$

(iii) $\frac{5}{7}x+8$ (iv) $3.5x+7$

(v) $2x-\frac{1}{2}(4-x)+0.5x$

(vi) $21-\frac{7}{5}\left[2x-\left(5-8x\right)\right]$

निम्न समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। समीकरण में प्रतिस्थापित करके अपने उत्तर की जाँच कीजिए :

24 $\frac{11}{2}x+\frac{16}{3}=5$

25 $\frac{18}{7}x-\frac{3}{14}=\frac{33}{14}$

26 $-\frac{19}{2x}-\frac{6}{x}=\frac{31}{5}$

27 $-\frac{x}{3}+\frac{3}{8}=\frac{14}{3}x-\frac{37}{8}+\left(x-1\right)$

28 $2x-3=\frac{3x-5}{4}-\frac{3-5x}{6}$

29. $\frac{2x-3}{3}-4=-x-\frac{5-3x}{3}$

30. $\frac{2-y}{3}-\frac{2}{5}+\frac{3-2y}{3}=-\frac{11}{15}$

31. $\frac{5z-2}{2}-2z=4-\frac{2z+1}{3}$

32. $\frac{7y+5}{3}-y=\frac{3y-5}{4}-\frac{1}{12}-\frac{1}{4}y+\frac{4}{3}y$

33. $\frac{7x-6}{4}+2=\frac{5x+3}{3}$

34. $\frac{11}{6}x-\left(\frac{5}{9}+\frac{2}{3}x\right)=\frac{10}{9}x-\frac{4}{9}$

35. $\frac{5}{3}x-\frac{3}{5}x=8$

36. $\frac{x-5}{x-3}+1=\frac{5}{2}$

37. $\frac{3x-8}{5x+9}=\frac{2}{3}$

38. $\frac{8-3x}{4}-\frac{3-9x}{5}=\frac{7-4x}{2}-\frac{x}{10}$

39. $-\frac{7}{6}x-4\left[4+\left(\frac{19}{6}x-7\right)\right]=\frac{23}{6}x-5$

40. $\frac{15}{7}+\left[\frac{8}{13}x-\left(1+\frac{15}{13}x+\frac{5}{7}-x\right)\right]=x-\left(\frac{4}{7}-\frac{19}{13}x\right)$

•41 $$1-\cfrac{\frac{1}{3}}{2+\cfrac{5}{3-\frac{1}{x}}}=4$$

42 एक दूध वाले के पास कुछ भैंसें, गायें और बकरियाँ हैं। बकरियों की संख्या गायों की संख्या की $\frac{9}{2}$ गुनी है तथा गायों की संख्या भैंसों की संख्या की $\frac{5}{2}$ गुनी है। यदि तीनों की कुल संख्या 59 है, तो दूध वाले की भैंसों, गायों और बकरियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

43. एक त्रिभुज ABC में $\angle A=60^\circ$ है। यदि कोणों B और C का अनुपात 5 : 7 है, तो कोण निर्धारित कीजिए।

44 एक परिमेय संख्या का हर, उसके अंश से 3 अधिक है। यदि अंश में 7 जोड़ दिया जाय तथा हर में से 2 घटा दिया जाय, तो हमें संख्या 2 प्राप्त होती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

45. एक त्रिभुज ABC का परिमाप 15 सें० मी० है। यदि $AB=5$ सें० मी० तथा BC और CA का अनुपात 2 : 3 है, तो BC और CA ज्ञात कीजिए।

46. वीरेन्द्र 4350 रु० का कुछ भाग 5% वार्षिक पर तथा शेष भाग 6% वार्षिक पर जमा कराता है। यदि उसका वर्ष का पूरा ब्याज 247.50 रु० है, तो बताइए उसने प्रत्येक दर पर कितने रुपये जमा किये थे।

47 गंगादीन अपनी भूमि का एक-चौथाई भाग अपने लिए रखता है तथा शेष को अपने दो पुत्रों में समान रूप से बाँट देता है। यदि प्रत्येक पुत्र को 2.25 हेक्टेयर भूमि मिलती है, तो बताइए कि गंगादीन अपने लिए कितनी भूमि रखता है।

48. विक्रम को स्वयं अपने, अपनी पत्नी और अपने 9 वर्षीय पुत्र के दिल्ली से कानपुर तक के रेल-टिकट के लिए 49.75 रु० देने पड़ते हैं। यदि 12 वर्ष से कम के बच्चे का आधा किराया लगता है, तो दिल्ली से कानपुर तक का एक व्यक्ति का पूरा किराया निर्धारित कीजिए।

49. शमीम की वर्तमान आयु अपने पिता की आयु की $\frac{1}{5}$ है, परन्तु दो वर्ष में उसकी आयु अपने पिता की आयु की एक-चौथाई हो जाएगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

50. निम्न दशमलवों को निम्नतम पदों की परिमेय संख्याओं में बदलिए :

(*i*) 5.32 (*ii*) 6.25

(*iii*) 58.67 (*iv*) 0.00025

(*v*) 20.053

51. निम्नतम पदों में वे परिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनके दशमलव निरूपण निम्न हैं :

(*i*) $5.\overline{9}$ (*ii*) $22.\overline{5}$

(*iii*) $2.\overline{44}$ (*iv*) $0.006\overline{2}$

(*v*) $0.12\overline{53}$ (*vi*) $25.0\overline{28}$

52. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ?

(*i*) $2.27\overline{9} = 2.28$

(*ii*) $5.328 = 5.32$

(*iii*) $16.32\overline{9} = 16.33$

(*iv*) $28.6\overline{48} = 28.7$

53 बिना परिकलन किए बताइए कि निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य ? सकारण उत्तर दीजिए।

(i) क्योंकि $\frac{15}{4} < \frac{21}{5}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{15}{4} + \frac{5}{8} < \frac{21}{5} + \frac{5}{8}$$ ।

(ii) क्योंकि $\frac{25}{16} < \frac{35}{17}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{25}{16} - \frac{27}{5} < \frac{35}{17} - \frac{27}{5}$$ ।

(iii) क्योंकि $-8 < -\frac{17}{3}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(-8) \times \left(-\frac{6}{7}\right) > \left(-\frac{17}{3}\right) \times \left(-\frac{6}{7}\right)$$ ।

(iv) क्योंकि $-3 > -5$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(-3) \times \frac{28}{13} > (-5) \times \frac{28}{13}$$ ।

(v) क्योंकि $35.08 > 32$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$(35.08) \div \left(-\frac{9}{8}\right) < 32 \div \left(-\frac{9}{8}\right)$$ ।

(vi) क्योंकि $\frac{128}{25} > \frac{40}{19}$, अतः यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{128}{25} \div 11 > \frac{40}{19} \div 11$$ ।

(*vii*) क्योंकि $\frac{31}{12} \quad \frac{38}{11}$, अत यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$\frac{31}{12} \quad \frac{38}{11} \text{।}$$

(*viii*) क्योंकि $\frac{31}{12} \quad \frac{38}{11}$, अत: यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$-\frac{31}{12} \quad -\frac{38}{11} \text{।}$$

54. निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं ? सकारण उत्तर दीजिए ।

(*i*) $\frac{5}{8} - \frac{6}{5} \quad 3 - \frac{6}{5}$

(*ii*) $2 + \frac{4}{13} \quad -2 + \frac{4}{13}$

(*iii*) $\frac{9}{16} \div \frac{5}{12} \quad \frac{2}{7} \div \frac{5}{12}$

(*iv*) $-\frac{7}{22} \div (-3) \quad -\frac{7}{18} \div (-3)$

(*v*) $3.5 \times (-6) \quad 4.2 \times (-6)$

(*vi*) $\frac{112}{15} \times \left(-\frac{10}{17}\right) > \frac{100}{19} \times \left(-\frac{10}{17}\right)$

55. क्या $z = 5.1$, असमीकरण $-2.5z - 5.7 < -18.7 - 3z$ का एक हल है ?

56. क्या $x = -2$, असमीकरण $\frac{3}{4}(x-4) \quad \frac{1}{5}(7x+3)$ का एक हल है ?

57. निम्न में कौन से कथन सत्य है ?

(i) $x = 2$ असमीकरण $2.65x - 28.7 > -23.4$ का एक हल है।

(ii) $x = \frac{9}{4}$ असमीकरण $\frac{2}{3}(x+6) > \frac{8}{3}x - 5$ का एक हल है।

(iii) $y = 5$ असमीकरण $16\left(y - \frac{3}{2}\right) \leqslant 12y + 28$ का एक हल है।

58. ऐसी असमीकरण बनाइए कि निम्न संख्याओं के समुच्चयों में से प्रत्येक उसका एक हल हो :

(i) $\frac{15}{2}, -\frac{18}{13}, \frac{2}{9}$

(ii) $\frac{1}{4}, -\frac{3}{5}, -\frac{2}{7}, \frac{5}{3}$

(iii) $-2.5, -3.5, -4.5$

59. निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक के पूर्ण संख्याओं में हल ज्ञात कीजिए :

(i) $4y - 24 \leqslant 12$

(ii) $-6x - \frac{7}{2} \geqslant -13$

60. निम्न असमीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए :

(i) $\frac{3}{8}\left(z - \frac{11}{6}\right) > \frac{3}{8}\left(2z - \frac{5}{3}\right)$

(ii) $\frac{x+2}{3} - \frac{3x+4}{4} \leqslant -\frac{5}{8}x$

(iii) $\frac{2x+1}{21} + \frac{1-x}{3} \geqslant \frac{1}{3} + \frac{x}{7}$

(iv) $\frac{5-y}{3} \cdots \frac{1-y}{6} \cdots \frac{7+2y}{4}$

(v) $\frac{8}{13}x-\left(\frac{15}{13}x+\frac{12}{7}-x\right) \leqslant x-\left(\frac{4}{7}-\frac{19}{13}x\right)-\frac{15}{7}$

*(vi) $\dfrac{1}{1-\dfrac{4}{3+\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{1+x}}}} < 2$

61. निम्न में से प्रत्येक प्रश्न में वे पूर्ण संख्याएँ लिखिए जो दोनों ही असमीकरणों के हल हैं :

(i) $3x-8<0$

$-2.5x \leqslant 2.75$

(ii) $\frac{5}{8}y-24 \leqslant -8$

$y \geqslant 20$

एकक IX

घातांक

इस एकक में हम परिमेय संख्याओं की पूर्णांकीय घातों के बारे में अध्ययन करेंगे। हम घातांक शब्दावली को प्रविष्ट करेंगे और घातांकीय संकेतन में लिखी संख्याओं के गुणन तथा विभाजन के लिए मूलभूत नियमों का अध्ययन करेंगे।

9.1 भूमिका

पिछली कक्षाओं में हमने पूर्णांकों के वर्ग, घन और उच्चतर (धनपूर्णांक) घातों के बारे में पढ़ा था। आपको याद होगा कि, उदाहरणार्थ, 3^2 को '3 की द्वितीय घात' या '3 का वर्ग' या '3 की घात 2' या '3 वर्ग' पढ़ा जाता है। साथ ही यह कि

$$3^2 = 3 \times 3$$

इसी प्रकार, $(-6)^3 = (-6) \times (-6) \times (-6)$

आपको याद होगा कि ऊपर लिखा संख्यांक, घातांक (exponent या index) कहलाता है। वह संख्या जिस पर कोई घात (power) [अर्थात् घातांक] लगी हो, आधार (base) कहलाती है। इस प्रकार, 3^2 में, 3 आधार है तथा 2 घातांक है। इसी प्रकार, $(-6)^3$ में, -6 आधार है तथा 3 घातांक है।

जैसा कि पूर्णांकों की स्थिति में है, जब किसी परिमेय संख्या को स्वयं उसी से गुणा किया जाता है तब हमें जो प्राप्त होता है उसे हम उस परिमेय संख्या की *द्वितीय घात* या उस परिमेय संख्या का *वर्ग* कहते हैं।

उदाहरणार्थ, $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3}$, $\frac{2}{3}$ का वर्ग है और इसे $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ लिखते हैं।

हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

परिमेय संख्याओं की उच्चतर घातों को भी इसी प्रकार परिभाषित किया गया है।

इस प्रकार, $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$

$$\left(\frac{-5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{5}{6}\right) = -\frac{125}{216}$$

दूसरे शब्दों में, यदि b एक परिमेय संख्या है तथा m एक धनपूर्णांक तो b^m उन m गुणनखंडों के गुणनफल को व्यक्त करता है जिनमें से प्रत्येक b है। अर्थात्,

$$b^m = \underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{(m \text{ बार})}$$

हम परिभाषित करते हैं कि $b^0 = 1$, जबकि b स्वयं शून्य नहीं है। इस प्रकार, $\left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1$, $(-31)^0 = 1$, $\left(\frac{-155}{216}\right)^0 = 1$, इत्यादि। यह स्पष्ट है कि किसी परिमेय संख्या की प्रथम घात स्वयं* वह संख्या ही होती है। इस प्रकार,

$$\left(\frac{16}{7}\right)^1 = \frac{16}{7}, \left(\frac{-8}{15}\right)^1 = \frac{-8}{15}, \text{ इत्यादि।}$$

* इसी कारण प्राय: हम घातांक 1 नहीं लिखते।

प्रश्नावली 9.1

1 निम्न संख्याओं में से प्रत्येक के आधार और घातांक लिखिए :

(i) $\left(\frac{3}{2}\right)^{4}$ (ii) 2^{n}

(iii) $\left(\frac{-5}{4}\right)^{3}$ (iv) $\left(\frac{11}{8}\right)^{3}$

(v) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{20}$ (vi) $\frac{7}{5}$

(vii) $\left(\frac{132}{143}\right)^{0}$

2 निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन (exponential notation) में लिखिए :

(i) $2\times2\times2\times2\times2\times2$

(ii) $\left(\frac{-8}{5}\right)\times\left(\frac{-8}{5}\right)\times\left(\frac{-8}{5}\right)$

(iii) $\frac{21}{11}\times\frac{21}{11}\times\frac{21}{11}\times\frac{21}{11}\times\frac{21}{11}\times\frac{21}{11}$

(iv) $\frac{1}{5}$

(v) $(2.07)\times(2.07)\times(2.07)\times(2.07)$

(vi) $(-5.5)\times(-5.5)\times(-5.5)\times(-5.5)\times(-5.5)$

(vii) $37\times37\times37\times37$

(viii) $\frac{21}{4}$

3. (क) $\frac{16}{81}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

(ख) $\frac{1}{64}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

4. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(*i*) $\left(\frac{4}{3}\right)^2$ (*ii*) $\left(-\frac{7}{8}\right)^2$

(*iii*) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ (*iv*) 2^6

(*v*) $\left(\frac{-5}{4}\right)^3$ (*vi*) $\left(\frac{11}{8}\right)^2$

(*vii*) $(-3)^7$ (*viii*) $(-18)^0$

(*ix*) $\left(\frac{207}{1352}\right)^0$ (*x*) $(2.5)^3$

(*xi*) $(-1.3)^4$ (*xii*) $(0)^5$

9.2 घातांकों के नियम

9.2.1 आइए अब घातांकीय संकेतन में लिखी एक ही आधार वाली संख्याओं के गुणन का अध्ययन करें। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $(-3)^5$ और $(-3)^2$ का गुणा कीजिए तथा गुणनफल को घातांकीय संकेतन में लिखिए।

हल : हम $(-3)^5 \times (-3)^2$ ज्ञात करना चाहते हैं तथा परिणाम को घातांकीय

संकेतन मे लिखना चाहते हैं। हम जानते हैं कि

$$(-3)^5 = (-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3) = -243$$

तथा, $(-3)^2=(-3)\times(-3)=9$

इस प्रकार, $(-3)^5\times(-3)^2=-243\times 9=-2187$

अब आइए $(-3)^7$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$(-3)^7=(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)$$
$$=-2187$$

हम देखते हैं कि $(-3)^5\times(-3)^2=(-3)^7=(-3)^{5+2}$

उदाहरण 2 : $\left(\frac{2}{3}\right)^4$ और $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ का गुणा कीजिए तथा गुणनफल को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{16}{81}$$

तथा, $$\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{8}{27}$$

इस प्रकार, $$\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{81}\times\frac{8}{27}=\frac{128}{2187}$$

अब आइए $\left(\frac{2}{3}\right)^7$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{128}{2187}$$

पुनः हम देखते हैं कि

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^7=\left(\frac{2}{3}\right)^{4+3}$$

हम देखते है कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का गुणा करते हे, तो हमें उसी आधार वाली तथा ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जोकि दी हुई संख्याओं के घातांकों के योग के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, गुणन में, घातांक जुड़ जाते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम लिखते हैं कि

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$b^m \times b^n = b^{m+n}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते है कि आधार एक ही है। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए।

$$\text{अर्थात्, } \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= \frac{1024}{3125}$$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

हल : पुन. आधार एक ही हैं। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5+3+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{-1}{512}$$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए :

   (i) $2^3 \times 2^6 = 2^9$

   (ii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)^5$

   (iii) $(-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^6$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

   (i) $2^3 \times 2^4 = 2^{12}$

   (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{14}$

   (iii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^8$

   (iv) $(-5)^8 \times (-5)^3 = (-5)^{24}$

   (v) $(3.1)^4 \times (3.1) = (3.1)^5$

   (vi) $7^9 \times 7^3 \times 7^0 = 7^{12}$

3. मान निकालिए :

   (i) $3^2 \times 3^3$ (ii) $(-10)^5 \times (-10)^8$

   (iii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$ (iv) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$

   (v) $\left(\frac{5}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$ (vi) $(1.2) \times (1.2)^3$

4. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

   $(-3)^3 \times (-3)^7 = (-3)^{2a}$ हो।

   [संकेत : $3+7=2a$]

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का गुणा करते हैं, तो हमें उसी आधार वाली तथा ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जोकि दी हुई संख्याओं के घातांकों के योग के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, गुणन में, घातांक जुड़ जाते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम लिखते हैं कि

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$b^m \times b^n = b^{m+n}$$

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही है। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए।

अर्थात्, $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3+2} = \left(\frac{4}{5}\right)^5$

$$= \frac{1024}{3125}$$

उदाहरण 4 : मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

हल : पुनः आधार एक ही हैं। इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए। हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^{5+3+1} = \left(-\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= \frac{-1}{512}$$

प्रश्नावली 9.2

1. निम्न की सत्यता की जाँच कीजिए :

   (i) $2^3 \times 2^6 = 2^9$

   (ii) $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(-\frac{5}{6}\right)^3 = \left(-\frac{5}{6}\right)^5$

   (iii) $(-3)^4 \times (-3)^2 = (-3)^6$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

   (i) $2^3 \times 2^4 = 2^{12}$

   (ii) $\left(-\frac{2}{3}\right)^9 \times \left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^{14}$

   (iii) $\left(\frac{3}{7}\right)^{10} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^8$

   (iv) $(-5)^8 \times (-5)^3 = (-5)^{24}$

   (v) $(3.1)^4 \times (3.1) = (3.1)^5$

   (vi) $7^9 \times 7^3 \times 7^0 = 7^{12}$

3. मान निकालिए :

   (i) $3^2 \times 3^3$ (ii) $(-10)^5 \times (-10)^8$

   (iii) $\left(\frac{3}{4}\right) \times \left(\frac{3}{4}\right)^4$ (iv) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 \times \left(-\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{4}{5}\right)$

   (v) $\left(\frac{5}{7}\right)^0 \times \left(\frac{5}{7}\right)^3$ (vi) $(1.2) \times (1.2)^3$

4. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

   $(-3)^3 \times (-3)^7 = (-3)^{2a}$ हो ।

[संकेत : $3+7=2a$]

5. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^{a+5} = \left(\frac{2}{5}\right)^{15} \text{ हो।}$$

9.2.2 अब हम घातांकीय संकेतन में लिखी एक ही आधार वाली संख्याओं के विभाजन पर विचार करते हैं। उदाहरणार्थ, निम्न उदाहरणों पर विचार कीजिए :

उदाहरण 5 : $(-2)^6$ को $(-2)^2$ से भाग दीजिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में लिखिए।

हल : हम $(-2)^6 \div (-2)^2$ अर्थात् $\frac{(-2)^6}{(-2)^2}$ ज्ञात करना चाहते हैं और परिणाम को घातांकीय संकेतन में लिखना चाहते हैं।

हम जानते हैं कि

$$(-2)^6 = 64$$

तथा, $$(-2)^2 = 4$$

इस प्रकार, $$\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = \frac{64}{4} = 16$$

अब आइए $(-2)^4$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2) = 16$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{(-2)^6}{(-2)^2} = (-2)^{6-2} = (-2)^4$$

उदाहरण 6 : $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ को $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$ से भाग दीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^5=-\frac{1}{32}$$

तथा, $$\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-\frac{1}{8}$$

इस प्रकार, $$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\frac{-\frac{1}{32}}{-\frac{1}{8}}=\frac{1}{4}$$

अब आइए $\left(-\frac{1}{2}\right)^2$ ज्ञात करें। हमें निम्न प्राप्त होता है:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

हम देखते हैं कि

$$\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}=\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \quad =\left(-\frac{1}{2}\right)^{5-3}$$

हम देखते हैं कि जब हम एक ही आधार वाली (घातांकीय संकेतन में लिखी) दो संख्याओं का विभाजन करते हैं तो हमें उसी आधार वाली और ऐसे घातांक वाली संख्या प्राप्त होती है जो कि दी हुई संख्याओं के घातांकों के अन्तर के बराबर है। संक्षेप में हम कहते हैं कि जब आधार एक ही हों तो, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं।

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम इसे इस प्रकार लिखते हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $m \geqslant n$, तो

$$\frac{b^m}{b^n}=b^{m-n}$$

अब हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 7 : $\left(\frac{3}{4}\right)^6 \div \left(\frac{3}{4}\right)^4$ का मान निकालिए।

हल : हम देखते हैं कि आधार एक ही हैं। अतः, विभाजन में, हमें घातांकों का अन्तर लेना चाहिए।

अर्थात्,
$$\frac{\left(\frac{3}{4}\right)^6}{\left(\frac{3}{4}\right)^4}=\left(\frac{3}{4}\right)^{6-4}=\left(\frac{3}{4}\right)^2$$
$$=\frac{9}{16}$$

उदाहरण 8 : $\frac{\left(\frac{-5}{9}\right)^8}{\left(\frac{-5}{9}\right)^5}$ का मान निकालिए।

हल : उपर्युक्त नियम का प्रयोग करने पर,
$$\frac{\left(\frac{-5}{9}\right)^8}{\left(\frac{-5}{9}\right)^5}=\left(\frac{-5}{9}\right)^{8-5}=\left(\frac{-5}{9}\right)^3$$
$$=\frac{-125}{729}$$

अब आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 9 : $3^3 \div 3^5$ का मान निकालिए।

हल : हम जानते हैं कि
$$3^3=3\times3\times3$$
तथा,
$$3^5=3\times3\times3\times3\times3$$

इस प्रकार, $3^3 \div 3^5 = \frac{3^3}{3^5} = \frac{3 \times 3 \times 3}{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1}{3 \times 3} = \frac{1}{3^2}$

अर्थात्, $\frac{3^3}{3^5} = \frac{1}{3^{5-3}} = \frac{1}{3^2}$

यह बड़ी सरलता से दिखाया जा सकता है कि यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n ऐसी पूर्ण संख्याएँ हैं कि $m \leqslant n$, तो

$$\frac{b^m}{b^n} = \frac{1}{b^{n-m}}$$

अब हम निम्न संकेतन प्रविष्ट कर रहे हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा r एक पूर्ण संख्या, तो हम व्यंजक

$$\frac{1}{\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{(r \text{ बार})}}$$ को b^{-r} से व्यक्त करते हैं।

अर्थात् हम लिखते हैं कि

$$b^{-r} = \frac{1}{\underbrace{b \times b \times b \times \ldots \times b}_{(r \text{ बार})}} = \frac{1}{b^r}$$

इस संकेतन से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{b^{n-m}} = b^{-(n-m)} = b^{m-n}$$

इस प्रकार, हमें $\frac{b^m}{b^n}$ जब कि $m \geqslant n$ या $m \leqslant n$ है के लिए पृथक-पृथक नियम लिखने की आवश्यकता नहीं है। केवल यह याद रखना ही पर्याप्त है कि, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं। यदि हमें एक ऋणात्मक घातांक

प्राप्त हो तो हम पीछे प्रविष्ट किए गए संकेतन का प्रयोग कर सकते हैं और उसे इस प्रकार लिख सकते हैं कि अंत में एक धनात्मक घातांक प्राप्त हो।

हम एक और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 10 : ज्ञात कीजिए :

(क) $\frac{(-5)^6}{(-5)^3}$ (ख) $\frac{(-2)^7}{(-2)^{16}}$

हल : (क) आपको याद होगा कि, विभाजन में, हम घातांकों का अन्तर लेते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{(-5)^6}{(-5)^3}=(-5)^{6-3}=(-5)^3$$

$$=-125$$

(ख) पुनः आपको याद होगा कि, विभाजन में, हम घातांकों का अंतर लिखते हैं। इस प्रकार,

$$\frac{(-2)^7}{(-2)^{16}}=(-2)^{7-16}=(-2)^{-9}$$

यहाँ हमें एक ऋणात्मक घातांक प्राप्त हुआ है। हम उस संकेतन का प्रयोग कर, जो हमने प्रविष्ट किया है, निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(-2)^{-9}=\frac{1}{(-2)^9}=-\frac{1}{512}$$

इस प्रकार, $\frac{(-2)^7}{(-2)^{16}}=(-2)^{-9}=\frac{1}{(-2)^9}=-\frac{1}{512}$

प्रश्नावली 9.3

1. निम्न में से प्रत्येक की सत्यता की जाँच कीजिए :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \div \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3$

(ii) $\dfrac{\left(\frac{1}{4}\right)^{11}}{\left(\frac{1}{4}\right)^7} = \left(\frac{1}{4}\right)^4$

(iii) $\left(\frac{12}{25}\right)^6 \div \left(\frac{12}{25}\right)^6 = \left(\frac{12}{25}\right)^0 = 1$

2. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ?

(i) $2^6 \div 2^2 = 2^3$ (ii) $2^6 \div 2^2 = 2^8$

(iii) $\dfrac{\left(-\frac{2}{3}\right)^9}{\left(\frac{-2}{3}\right)^5} = \left(\frac{-2}{3}\right)^4$ (iv) $\dfrac{(-5)^9}{(-5)^3} = (-5)^3$

(v) $(0.6)^8 \div (0.6)^0 = (0.6)^7$ (vi) $\left(\frac{3}{4}\right)^{12} \div \left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{11}$

3. मान निकालिए :

(i) $\left(\frac{1}{3}\right)^4 \div \left(\frac{1}{3}\right)$ (ii) $(-2)^5 \div (-2)^3$

(iii) $(3^4 \times 3^5) \div (3^2 \times 3^3)$ (iv) $(4^3 \times 4) \div (2^2 \times 2^0)$

*(v) $(2^4 \times 3^5) \div (2^3 \times 3^2)$ (vi) $(3^6 \div 3^4) \times (3^7 \div 3^5)$

(vii) $(5^3 \div 5) \times (2^4 \div 2^2)$ (viii) $\dfrac{8^5}{4^5}$

(ix) $\dfrac{2^5}{2^8}$ (x) $5^9 \div 5^{12}$

*(xi) $\frac{27^3}{9^3}$

(xii) $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^8}{\left(-\frac{1}{2}\right)^5} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^5}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3}$

(xiii) $\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5}{\left(\frac{1}{3}\right)^3} - \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6}{\left(\frac{1}{3}\right)^5}$

4. निम्न में से प्रत्येक में 'a' ज्ञात कीजिए।

(i) $\left(\frac{2}{7}\right)^8 \div \left(\frac{2}{7}\right)^5 = \left(\frac{2}{7}\right)^{2a+1}$

(ii) $\left(\frac{-8}{3}\right)^{11} \div \left(\frac{-8}{3}\right)^3 = \left(\frac{-8}{3}\right)^{2a+2}$

9.2.3 अब हम घातांकीय संकेतन में लिखी किसी संख्या की घात के लिए नियम विकसित करेंगे।

उदाहरणार्थ, निम्न पर विचार कीजिए :

$(3^3)^2 = 3^3 \times 3^3$ (परिभाषा से)

चूँकि आधार एक ही हैं, घातांक जुड़ जाने चाहिए।

इस प्रकार, $(3^3)^2 = 3^{3+3}$

$= 3^6$

हम देखते हैं कि

$(3^3)^2 = 3^6 = 3^{3\times2}$

आइए एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 11 : $\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^4\right]^3$ का मान निकालिए।

हल : परिभाषा से,

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)^4\right]^3=\left(-\frac{2}{3}\right)^4\times\left(-\frac{2}{3}\right)^4\times\left(-\frac{2}{3}\right)^4$$

अब आधार एक ही हैं । इस प्रकार, गुणन में, घातांक जुड़ जाने चाहिए । हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^4\right]^3=\left(\frac{-2}{3}\right)^{4+4+4}=\left(\frac{-2}{3}\right)^{12}$$

$$=\frac{4096}{531441}$$

हम पुनः देखते हैं कि

$$\left[\left(\frac{-2}{3}\right)^4\right]^3=\left(\frac{-2}{3}\right)^{12}=\left(\frac{-2}{3}\right)^{4\times 3}$$

चिन्हों और संकेतों का प्रयोग कर हम इसे निम्न प्रकार लिखते हैं :

यदि b एक शून्येतर परिमेय संख्या है तथा m और n पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$$(b^m)^n = b^{mn}$$

हम एक अन्य उदाहरण लेते हैं ।

उदाहरण 12 : यदि $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^4=\left(\frac{4}{5}\right)^{3a-1}$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए ।

हल : हम उपर्युक्त नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

वाम पक्ष $=\left[\left(\frac{4}{5}\right)^2\right]^4=\left(\frac{4}{5}\right)^{2\times 4}=\left(\frac{4}{5}\right)^8$

अतः, $\left(\frac{4}{5}\right)^8=\left(\frac{4}{5}\right)^{3a-1}$

जिससे, $8=3a-1$

इस प्रकार, $a=3$

प्रश्नावली 9.4

1. मान निकालिए :

(i) $(2^4)^3$ (ii) $\left[\left(\frac{-2}{7}\right)^2\right]^2$ (iii) $[(-4)^3]^2$

(iv) $(3^2)^3$

*(v) $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^3\right]^4$

[अपना उत्तर घातांकीय संकेतन में ही रहने दीजिए।]

(vi) $[(-9)^6]^5$

[अपना उत्तर घातांकीय संकेतन में ही रहने दीजिए।]

2. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$$\left[\left(\frac{2}{11}\right)^8\right]^3=\left(\frac{2}{11}\right)^{a+1} \text{ हो।}$$

3. मान निकालिए और परिणाम को घातांकीय संकेतन में व्यक्त कीजिए :

(i) $(5^4)^3\times(5^2)^4$ (ii) $(8^3)^5\times(8^2)^4$

(iii) $[(0.1)^4]^3\div[(0.1)^2]^4$ (iv) $[(2.2)^5]^2\div[(2.2)^2]^3$

(v) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^5$ (vi) $(7^4\times7^2)^8$

(vii) $[5^{10}\div5^8]^{10}$ (viii) $\left(\frac{9^4\times9^6}{9^8}\right)^3$

(ix) $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^8\times\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)^9}\right]^2$

4. यदि $25 \times 5^a = 5^4$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।
5. यदि $9 \times 3^4 = 3^a$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।

9.3 घातांकीय संकेतन का उपयोग

प्रायः हमें बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्याओं का प्रयोग करना होता है। ऐसी स्थितियों में घातांकीय संकेतन बहुत उपयोगी रहता है। उदाहरणार्थ, सूर्य की पृथ्वी से दूरी पर विचार कीजिए। यह ज्ञात है कि यह दूरी लगभग 15,00,00,000 किलोमीटर है। घातांकीय संकेतन का उपयोग कर हम इसे 15×10^7 किलोमीटर अथवा 1.5×10^8 किलोमीटर के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

भूगोल में हम पढ़ते हैं कि पृथ्वी का पृष्ठ क्षेत्रफल लगभग 51,00,00,000 वर्ग किलोमीटर हैं, जिसमें से भूमि ने लगभग 14,90,00,000 वर्ग किलोमीटर तथा पानी ने लगभग 36,10,00,000 वर्ग किलोमीटर क्षेत्र घेरा हुआ है। घातांकीय संकेतनों का उपयोग कर हम उपर्युक्त पृष्ठ क्षेत्रफलों को क्रमशः लगभग 51×10^7 वर्ग किलोमीटर, $149 \times 10^6 (= 14.9 \times 10^7)$ वर्ग किलोमीटर तथा $361 \times 10^6 (= 36.1 \times 10^7)$ वर्ग किलोमीटर के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

हम नीचे ऐसी स्थितियों के कुछ और उदाहरण दे रहे हैं जहाँ हमें बहुत बड़ी या बहुत छोटी संख्याएँ देखने को मिलती हैं। हम इन संख्याओं को घातांकीय संकेतन में भी व्यक्त कर रहे हैं।

(1) *TDC*–316 कमप्यूटर (लगभग) 90,00,00,000 संक्रियाएँ (योग, व्यवकलन) प्रति घंटा करता है।	9×10^8 संक्रियाएँ प्रति घंटा
(2) भारी शारीरिक कार्य में लगे व्यक्ति की आवश्यक ऊर्जा लगभग 16,400 जूल (joules) प्रति दिन है।	164×10^2 जूल प्रति दिन [$= 16.4 \times 10^3$ जूल प्रति दिन]

(3) भारतीय समुद्री-सीमा की लम्बाई लगभग 6100 किलोमीटर है।	61×10^2 किलोमीटर [$=6.1 \times 10^3$ किलोमीटर]
(4) सोने के एक औंस (ounce) में लगभग 8,65,00,00,00,00,00,00,00,00,000 परमाणु (atoms) होते हैं।	865×10^{19} परमाणु [$=8.65 \times 10^{21}$ परमाणु]
(5) रक्त के एक ही लाल कोषाणु (red cell) में लगभग 27,00,00,000 हीमोग्लोबिन (hemoglobin) के अणु (molecules) होते हैं।	27×10^7 अणु [$=2.7 \times 10^8$ अणु]
(6) *TDC*—316 कमप्यूटर द्वारा योग या व्यवकलन की एक संक्रिया पूरी करने में लिया गया समय लगभग $\frac{4}{10,00,000}$ सैकन्ड होता है।	4×10^{-6} सैकन्ड
(7) तरंग-दैर्ध्य (wavelength) मापने का मात्रक एंग्स्ट्रोम (**angstrom**) कहलाता है और इसे संकेत Å से से व्यक्त किया जाता है।	$\text{Å} = 10^{-10}$ मीटर

$\text{Å} = \frac{1}{10,00,00,00,000}$ मीटर

मुख्य संकल्पनाएँ

आधार	घातांकों के नियम
घातांक	घतांकीय संकेतन

एकक X

विशेष गुणनफल और गुणनखंडन

इस एकक में हम सीखेंगे कि एक एकपदी और एक बहुपद का किस प्रकार गुणा किया जाता है। हम कुछ विशेष गुणनफलों, जैसे कि एक द्विपद का वर्ग तथा दो संख्याओं के योग और अंतर का गुणा, पर विचार करेंगे। अंत में हम पूर्ण वर्ग त्रिपदों (perfect square trinomials) और दो वर्गों के अंतर का गुणनखंडन सीखेंगे।

10.1 पुनरावलोकन

आपको अपनी पिछली कक्षाओं से बीजीय व्यंजकों के गुणन का पुनरावलोकन करना चाहिए। विशेष रूप से, आपको निम्न संकल्पनाओं को दोहराना चाहिए :

दो या अधिक एकपदियों का गुणन

दो द्विपदों का गुणन

आपको एक द्विपद का वर्ग लिखने की विधि को भी दोहराना चाहिए, अर्थात् यह कि

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

शब्दों में, हम कहते हैं कि एक द्विपद का वर्ग, पहले पद के वर्ग, दूसरे पद के वर्ग और दोनों पदों के गुणनफल के दुगुने के योग के बराबर होता है।

हम नीचे कुछ प्रश्न दे रहे हैं ताकि आप उपर्युक्त संकल्पनाओं को दोहरा सकें तथा उनका अनुप्रयोग कर सकें।

प्रश्नावली 10.1

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $x^4 \times x^7$
2. $y^2 \times y^6$
3. $a^0 \times a^3$
4. $a^6 \times a^{14}$
5. $2x^3 \times \frac{1}{3}x^7$
6. $-\frac{1}{7}y^5 \times \frac{10}{11}y^{13}$
7. $\frac{1}{2}y^4 \times \frac{3}{4}y^5$
8. $\frac{5}{13}b^3 \times 13b$
9. $7a^7 \times \frac{3}{7}a^5 \times 4a^2$
10. $(-4x^2)(-2x)(-6x^2)$
11. $3d^3 \times (-2d^2) \times (-d^5)$
12. $4a\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{4}\right)$
13. $\frac{1}{2}y^3(3y^2-4y)$
14. $2a^2 \left(\frac{1}{2}a^2+4a\right)$
15. $\left(-\frac{3}{8}y^3\right)\left(4y^3 + \frac{8}{3}y\right)$
16. $3y(6y^3-4y^2)$
17. $-2d^3(6d-5d^4)$
18. $(2x+3)(7x-4)$
19. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}\right)$
20. $(2x-a)(2x-b)$
21. $(x+7)^2$
22. $(3x-1)^2$

23. $\left(\frac{1}{2}x-4\right)^2$

24. $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$

25. $(5x+3)(5x-3)$

26. $(3x+1)(x+2)$

27. $(x^2+x)^2$

28. $\left(y+\frac{y^2}{2}\right)^2$

29. $\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-5\right)$

30. $\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\left(\frac{x}{3}+1\right)$

10.2 एकपदी और बहुपद का गुणन

हम पहले ही जानते हैं कि एक एकपदी और एक द्विपद का किस प्रकार गुणा किया जाता है। आइए अब एक एकपदी और एक बहुपद का गुणा करना सीखें। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $2x$ और $3x^2-5x+2$ का गुणा कीजिए।

हल : हम गुणन के वितराणात्मक गुण (distributive property) का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$2x(3x^2-5x+2)=2x(3x^2)+2x(-5x)+2x(2)$$
$$=6x^3-10x^2+4x$$

उदाहरण 2 : $4b^3$ और $-3b^2+b^5-b+1$ का गुणा कीजिए।

हल : पुनः हम गुणन के वितरणात्मक गुण का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$4b^3(-3b^2+b^5-b+1)=4b^3(-3b^2)+4b^3(b^5)+4b^3(-b)+4b^3(1)$$
$$=-12b^5+4b^8-4b^4+4b^3$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि एक बार वितरणात्मक गुण का प्रयोग करने के बाद गुणन, केवल एकपदियों का गुणन ही रह जाता है।

उदाहरण 3 : दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :

$$4a(2a^2-6a+5)-3a^2(6a^3-3)+a^5(a+2)$$

हल : उपर्युक्त उदाहरणों की तरह हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$4a(2a^2-6a+5)-3a^2(6a^3-3)+a^5(a+2)$$
$$=8a^3-24a^2+20a-(18a^5-9a^2)+(a^6+2a^5)$$
$$=8a^3-24a^2+20a-18a^5+9a^2+a^6+2a^5$$
$$=8a^3-15a^2+20a-16a^5+a^6$$

प्रश्नावली 10.2

दर्शाए गए गुणन कीजिए :

1. $2y^2\left(\frac{1}{2}y^2+4y-2\right)$
2. $-\frac{3}{8}b^3\left(\frac{8}{3}b^2+\frac{2}{3}b-b^3\right)$
3. $3x^2(5x^2-7x+2)$
4. $2a(a^2-3a+5)$
5. $-3y^2(2y+4y^2-3+2y^3)$
6. $\frac{1}{4}x\left(\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+4\right)$
7. $7y^2(-y^3+3y^2-y-6)$
8. $4p^4(-5p^2+3p-2)$
9. $(-5a^2+3a^3-a-3)a^3$
10. $3(-7a^3-5a+a^2+a^4-a^5)a^2$

दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :

11. $3x^4(2x^3-5x^4)-5x^3(x^4-3x^5)$
12. $3b^4(6b^3-5+4b^2)-6b^4(3b^3+2b^2)$
13. $8p^3(4p^2-3)-4p^3(8p^2-3p^3-6)$
14. $4c^4(2-3c^5)+3c^4(4+3c)-2c^2(4c^2-3c^3)$
15. $x(x^2-3x+1)+x^2(x^3-x)-x^3(x^4+x^2-1)+7(3x^2+x-4)$

10.3 विशेष गुणनफल

बहुत से प्रश्नों में कुछ बहुपद ऐसे गुणनखंडों के रूप में बार-बार आते हैं जिनका गुणा किया जाना होता है। अतः यह सुविधाजनक है कि इन गुणनफलों को मस्तिष्क में ही ज्ञात करना और तेज़ी के साथ लिखना सीखा जाए। हम इन्हें **विशेष गुणनफल (special products)** कहते हैं। हम ऐसे दो विशेष गुणनफल पहले ही पढ़ चुके हैं, अर्थात् यह है कि

$$I \quad (x+y)^2=x^2+2xy+y^2$$
$$II \quad (x-y)^2=x^2-2xy+y^2$$

हम नीचे उपर्युक्त दो गुणनफलों को याद रखने की सुविधाजनक विधि दर्शा रहे हैं .

$$(x\pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy$$

x का वर्ग → x^2

y का वर्ग → जोड़िए → y^2

x और y के गुणनफल का दुगुना → यदि द्विपद दो संख्याओं का योग है तो जोड़िए / यदि द्विपद दो संख्याओं का अंतर है तो घटाइए → $2xy$

यह नियम हमारे लिए दूसरी प्रकृति बन जाना चाहिए। हमें किसी भी द्विपद का वर्ग तुरन्त लिखने में समर्थ होना चाहिए। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $(2a+3b)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(2a+3b)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 12ab$$

$(2a)^2$ → $4a^2$

$(3b)^2$ → जोड़िए → $9b^2$

$2(2a)(3b)$ → जोड़िए → $12ab$

अर्थात्, $(2a+3b)^2=4a^2+9b^2+12ab$

उदाहरण 2 : $(3x-4y^2)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम पुनः नियम का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(3x-4y^2)^2 = 9x^2 + 16y^4 - 24xy^2$$

$(3x)^2$ → $9x^2$

$(4y^2)^2$ → जोड़िए → $16y^4$

$2(3x)(4y^2)$ → घटाइए → $24xy^2$

अर्थात्, $(3x-4y^2)^2 = 9x^2 + 16y^4 - 24xy^2$

अब हम दो और विशेष गुणनफलों पर विचार करते हैं। आइए पहले दो संख्याओं के योग और अंतर का गुणनफल ज्ञात करें। इस बात की सरलता से जाँच की जा सकती है कि

$$III \quad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2$$

शब्दों में हम कहते हैं कि **दो संख्याओं के योग और अन्तर का गुणनफल उनके वर्गों के अन्तर के बराबर होता है।** हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 3 : $(4y-9z)(4y+9z)$ ज्ञात कीजिए।

हल : नियम *III* का प्रयोग करने पर हमें तुरन्त निम्न प्राप्त होता है :

$$(4y-9z)(4y+9z) = 16y^2 - 81z^2$$

$(4y)^2$ → $16y^2$

$(9z)^2$ → घटाइए → $81z^2$

अर्थात्, $(4y-9z)(4y+9z) = 16y^2 - 81z^2$

उदाहरण 4 : $\left(\frac{1}{2}a^2 - b\right)\left(\frac{1}{2}a^2 + b\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः हम नियम III का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{1}{2}a^2-b\right)\left(\frac{1}{2}a^2+b\right) = \frac{1}{4}a^4 - b^2$$

$\left(\frac{1}{2}a^2\right)^2$ ——————— ↑ ($\frac{1}{4}a^4$)

$(b)^2$ ——— घटाइए ——— ↑ (b^2)

अर्थात्, $\left(\frac{1}{2}a^2-b\right)\left(\frac{1}{2}a^2+b\right)=\frac{1}{4}a^4-b^2$

अंत में, आइए समान पदों वाले दो द्विपदों का गुणनफल ज्ञात करें। पहले हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं :

उदाहरण 5 : $(4x+3y)(3x-5y)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम गुणन के वितरणात्मक गुण का प्रयोग कर सकते हैं और दिए हुए द्विपदों के गुणन को एकपदियों के गुणन में परिवर्तित कर सकते हैं। परन्तु हम गुणनफल को तुरन्त ही लिखने में समर्थ होना चाहते हैं। हम वांछित चरणों को नीचे दर्शा रहे हैं :

$$(4x+3y)(3x-5y) = 12x^2 - 15y^2 - 11xy$$

$(4x)(3x)$ ——————— ↑ ($12x^2$)

$(3y)(-5y)$ ——————— ↑ ($-15y^2$)

$(4x)(-5y)+(3y)(3x)=-20xy+9xy$ ——— ↑ ($-11xy$)

अर्थात्, $(4x+3y)(3x-5y)=12x^2-15y^2-11xy$

इस प्रकार हमें चौथा विशेष गुणनफल प्राप्त होता है जो निम्न है :

IV $(ax+by)(cx+dy)=acx^2+bdy^2+(ad+bc)xy$

$(ax)(cx)$ ——— ↑ (acx^2)

$(by)(dy)$ ——————— ↑ (bdy^2)

$(ax)(dy)+(by)(cx)=adxy+bcxy$ ——— ↑ ($(ad+bc)xy$)

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 6 : $(2x+3)$ और $(7x-4)$ का गुणा कीजिए।

हल : हम नियम IV का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(2x+3)(7x-4) = 14x^2 - 12 + 13x$$

$(2x)(7x) \rightarrow 14x^2$

$(3)(-4) \rightarrow -12$

$(2x)(-4)+(3)(7x) = -8x+21x \rightarrow 13x$

अर्थात्, $(2x+3)(7x-4) = 14x^2+13x-12$

उदाहरण 7 : $(4x^2-5y)$ और $(5x^2+8y)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : पुनः हम नियम IV का प्रयोग करते हैं और निम्न प्राप्त करते हैं :

$$(4x^2-5y)(5x^2+8y) = 20x^4 - 40y^2 + 7x^2y$$

$(4x^2)(5x^2) \rightarrow 20x^4$

$(-5y)(8y) \rightarrow -40y^2$

$(4x^2)(8y)+(-5y)(5x^2) = 32x^2y-25x^2y \rightarrow 7x^2y$

अर्थात्, $(4x^2-5y)(5x^2+8y) = 20x^4+7x^2y-40y^2$

हम संख्याओं के गुणनफल तुरन्त ही परिकलित करने में भी उपर्युक्त नियमों का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरणार्थ,

$$104\times 96 = (100+4)(100-4) = 100^2-4^2 \qquad \text{(नियम III)}$$
$$= 10000-16 = 9984$$

$$101^2 = (100+1)^2 = 100^2+1^2+2(100)(1) \qquad \text{(नियम I)}$$
$$= 10201$$

$$\left(\frac{39}{40}\right)^2=\left(1-\frac{1}{40}\right)^2=1^2+\left(\frac{1}{40}\right)^2-2\,(1)\left(\frac{1}{40}\right) \qquad \text{(नियम II)}$$

$$=\frac{1521}{1600}$$

अथवा, $\left(\frac{39}{40}\right)^2=\left(\frac{40-1}{40}\right)^2=\frac{40^2+1^2-2(40)(1)}{40^2}$

$$=\frac{1521}{1600}$$

पुनः इन नियमों का कुछ त्रिपदों के गुणनफल परिकलित करने में भी युक्ति-पूर्वक प्रयोग किया जा सकता है। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 8 : $(2x-3y+4z)$ और $(2x-3y-4z)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए।

हल : हम पदों के समूह बनाकर नियम III का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(2x-3y+4z)(2x-3y-4z)=(2x-3y)^2-(4z)^2$$

अब नियम II का प्रयोग करके $(2x-3y)^2$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$(2x-3y)^2=4x^2+9y^2-12xy$$

इस प्रकार, $(2x-3y+4z)(2x-3y-4z)=4x^2+9y^2-12xy-16z^2$

उदाहरण 9 : $(a-2b+4c)^2$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम $a-2b$ को एक पद मान सकते हैं और नियम I का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(a-2b+4c)^2=(a-2b)^2+16c^2+8c(a-2b)$$

अब $(a-2b)^2$ ज्ञात करने के लिए हम नियम II का प्रयोग करते हैं जिससे हमें निम्न अंतिम परिणाम प्राप्त होता है :

$$(a-2b+4c)^2=a^2+4b^2-4ab+16c^2+8ac-16bc$$

प्रश्नावली 10.3

निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

1. $(x+2y)^2$

2. $(3y-2)^2$

3. $(2x^2-y^2)^2$

4. $(9r+2s)^2$

5. $(5y^3+4)^2$

6. $(3m+7n^2)^2$

7. $\left(a^2+\frac{2}{3}b\right)^2$

8. $(10p-3q)^2$

9. $\left(\frac{1}{4}m^3+n^2\right)^2$

10. $\left(\frac{3}{2}z^2-\frac{2}{5}y\right)^2$

11. $(xy^2-3)^2$

12. $(8w-7z)^2$

13. $(3-2x)(3+2x)$

14. $\left(\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{2}x\right)$

15. $\left(3\frac{a}{b}+4\frac{x}{y}\right)\left(3\frac{a}{b}-4\frac{x}{y}\right)$

16. $(4m-7n)(4m+7n)$

17. $(4x-5y^2)(4x+5y^2)$

18. $\left(\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}y\right)\left(-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{3}y\right)$

19. $(3a^2-5b^3)(3a^2+5b^3)$

20. $\left(\frac{3}{2}x^3-y^2\right)\left(\frac{3}{2}x^3+y^2\right)$

21. $(4b^2-3c^4)(4b^2+3c^4)$

22. $(x^2+2y)(x^2+3y)$

23. $(2y-5)(y+2)$

24 $(6x-5)(5x+7)$

***25.** $\left(\frac{3}{5x}+\frac{5}{6}\right)\left(\frac{2}{3x}+\frac{4}{5}\right)$

26. $(3y^2+2z)(-2y^2+z)$

27. $(2x^2+3)(5x^2-6)$

28. $\left(\frac{1}{2}a^3-3b^2\right)(2a^3+4b^2)$

29. $[(2x-y)-2]^2$

30. $(x+2y-z)^2$

31. $(a^2-a+1)^2$

32. $(m-2n+3)^2$

33. $(3y^2-2y+1)^2$

34. $(y^2-3y+5)^2$

35. $[(x-y)+1][(x-y)-1]$

36. $(a+b+3)(a+b-3)$

37. $(1-2x+y)(1+2x-y)$

38. $(x+y+z+1)(x+y-z-1)$

39. $(2x-3y)(-2x-3y)$

40. $(2x+3y-4)(2x+3y-2)$

41. $(3z^2-2y^3+x)(3z^2-2y^3-x)$

42. $(a^2+2-a)(a^2+2+a)$

43. $(x^2+x+x^3-1)(x^2+x-x^3+1)$

44. $(3x+3y-5)(5x+5y+3)$

45. $(2y^2+c^2-2yc)(2y^2+c^2+2yc)$

विशेष गुणनफलों के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

46. $(1001)^2$

47. $(61)^2$

48. 99^2

49. $\left(\frac{51}{32}\right)^2$

50. 36^2-34^2

51. 89^2-79^2

52. $\frac{101^2-5^2}{106}$

53. 41×39

54. 31×29 55. 47×53

56. $\frac{56}{113}\left[\left(\frac{8}{7}\right)^2-\left(\frac{7}{8}\right)^2\right]$

57. यदि हमें $5p=44^2-39^2$ दिया हुआ हो, तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए।

58. $958^2-953^2=15d$ दिया हुआ है। 'd' का मान ज्ञात कीजिए।

10.4 गुणनखंडन

10.4.1 अनुच्छेद 10.3 में हमने सीखा है कि कुछ दिए हुए गुणनखंडों का गुणनफल किस प्रकार ज्ञात किया जाता है। अब हम कुछ दिए हुए गुणनफलों के गुणनखंड ज्ञात करने की समस्या पर विचार करते हैं। यह प्रक्रिया गुणनखंडन (factoring) कहलाती है। हम केवल उन्हीं बहुपदों के गुणनखंडन पर विचार करेंगे जिनके गुणांक पूर्णांक हैं। एक बहुपद पूर्णतया गुणनखंडित हुआ (completely factored) तभी माना जाता है जबकि आगे उसके गुणनखंडों में से कोई भी उससे कम घात के दो बहुपदों के गुणा के रूप में व्यक्त न किया जा सके तथा उनके गुणांकों में कोई उभयनिष्ठ गुणनखंड न हो। हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : $4x^3-6x^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि बहुपद के प्रत्येक पद में एक गुणनखंड, अर्थात् $2x^2$, उभयनिष्ठ है।

अतः हम वितरणात्मक गुण का प्रयोग कर सकते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$$

उदाहरण 2 : $x(b+c)+y(b+c)$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : पुनः हम देखते हैं कि प्रत्येक पद में $(b+c)$ एक उभयनिष्ठ गुणनखंड है। इस प्रकार,

$$x(b+c)+y(b+c)=(b+c)(x+y)$$

हम ऐसे बहुपद जिसमें एक उभयनिष्ठ गुणनखंड हो के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम लिखते हैं :

F I : **यदि बहुपद के प्रत्येक पद में एक उभयनिष्ठ गुणनखंड हो, तो हम बहुपद को दो ऐसे गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिनमें से एक स्वयं वह उभयनिष्ठ गुणनखंड है।**

10.4.2 अब हम उन बहुपदों के गुणनखंडन पर विचार करते हैं जिन्हें दो वर्गों के अंतर के रूप में लिखा जा सकता है। आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें :

उदाहरण 3 : $9x^2-4$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हम देखते हैं कि $9x^2-4$ को दो वर्गों के अंतर के रूप में निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$9x^2-4=(3x)^2-(2)^2$$

अतः हम नियम III का प्रयोग कर सकते हैं और उन संख्याओं के योग और अंतर के रूप में गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं जिनके वर्ग किए गए हैं।

इस प्रकार, $9x^2-4=(3x+2)(3x-2)$

हमें दो वर्गों के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम प्राप्त होता है :

F II : $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

शब्दों में हम कहते हैं कि **दो संख्याओं के वर्गों का अंतर उन संख्याओं के योग और अंतर के गुणनफल के बराबर होता है।** हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4 : $16-25y^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$16-25y^2=(4)^2-(5y)^2$$
$$=(4+5y)(4-5y)$$

उदाहरण 5 : $9x^2-(b+c)^2$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$9x^2-(b+c)^2=(3x)^2-(b+c)^2$$
$$=(3x+b+c)(3x-b-c)$$

उदाहरण 6 : $4a^4-64b^4$ के पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए।

हल : हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}4a^4-64b^4&=4(a^4-16b^4)\\&=4[(a^2)^2-(4b^2)^2]\\&=4(a^2+4b^2)(a^2-4b^2)\\&=4(a^2+4b^2)[(a)^2-(2b)^2]\\&=4(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)\end{aligned}$$

इस प्रकार,

$$4a^4-64b^4=4(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$$

10.4.3 अब हम उन त्रिपदों का गुणनखंडन करना सीखेंगे जो पूर्ण वर्ग हैं। आइए निम्न उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 7 : $4x^2+12x+9$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : हमें निम्न स्थिति प्राप्त होती है :

$$4x^2+12x+9=(2x)^2+2(2x)(3)\quad+(3)^2$$

अर्थात्, हमारे पास एक ऐसा त्रिपद है जिसमें दो पद किन्हीं दो संख्याओं के वर्ग हैं तथा एक पद उन संख्याओं के गुणनफल का दुगुना है। अतः हम नियम I का प्रयोग कर सकते हैं और दिए हुए त्रिपद के निम्न गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं :

$$4x^2+12x+9=(2x+3)^2$$

उदाहरण 8 : $25y^4-40y^2+16$ के गुणनखंड कीजिए।

हल : पुनः हम देखते हैं कि

$$25y^4-40y^2+16=(5y^2)^2-2(5y^2)(4)\quad+(4)^2$$

अतः हम नियम II का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न प्राप्त कर सकते हैं :

$$25y^4-40y^2+16=(5y^2-4)^2$$

अत: हमें पूर्ण वर्ग त्रिपदों के गुणनखंडन के लिए निम्न नियम प्राप्त होते हैं :

F III : $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$

F IV : $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$

[पाठक को चाहिए कि वह इन नियमों को शब्दों में लिखे ।]

हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9 : $(2x-3y)^2-10\,(2x-3y)+25$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : हम मान लेते हैं कि दिए हुए त्रिपद में, उदाहरणार्थ, $2x-3y=z$ है। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$z^2-10z+25$$

हम देखते हैं कि यह एक पूर्ण वर्ग त्रिपद है । अत: हम F IV का प्रयोग कर सकते हैं और निम्न गुणनखंड प्राप्त कर सकते हैं :

$$z^2-10z+25=(z-5)^2$$

z के स्थान पर $(2x-3y)$ प्रतिस्थापित करने पर हमें दिए हुए त्रिपद के निम्न गुणनखंड प्राप्त होते हैं :

$$(2x-3y)^2-10(2x-3y)+25=(2x-3y-5)^2$$

***उदाहरण 10 :** $16x^2-40xy+25y^2-9$ के गुणनखंड कीजिए ।

हल : हम देखते हैं कि हम पहले तीन पदों का एक समूह बना सकते हैं जोकि एक पूर्ण वर्ग त्रिपद बनाते हैं । तब, F IV का प्रयोग करने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$16x^2-40xy+25y^2-9=(16x^2-40xy+25y^2)-9$$
$$=(4x-5y)^2-9$$

अब हमारे पास दो वर्गों का अंतर है । F II का प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$16x^2-40xy+25y^2-9=(4x-5y)^2-(3)^2$$
$$=(4x-5y+3)(4x-5y-3)$$

प्रश्नावली 10.4

पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

1. $2x^2-4x^4$
2. x^4-3x^3
3. $-4y^3+2y$
4. $8x^3+5x+3x^2$
5. x^3+x^2+3x
6. $4(y+2)-b(y+2)$
7. $15x^4+10x^2-5x^3$
8. $2ay+y+b^2y$
9. $7x^3-5ax^2-x^4$
10. $3a(1-b)+2c(1-b)$
11. $16x^2-9$
12. a^2-9b^2
13. $4-36x^2$
14. $9a^2-4a^2y^2$
15. x^4-y^4
16. a^4-81
17. x^6-36y^4
18. $p^2q^2x^2-4r^2s^2$

*19. $\frac{1}{9}x^2y^2-\frac{9}{25}y^2z^2$

$\left[\text{संकेत : } \frac{1}{9}x^2y^2-\frac{9}{25}y^2z^2=\frac{25x^2y^2-81y^2z^2}{225}\right]$

*20. $\frac{4}{9}x^2-\frac{1}{16}z^2$

21. $(3x-2y)^2-16z^2$
22. $4x^2-(y+3z)^2$
23. $16a^2-(3b-c)^2$
24. $9m^2+12mn+4n^2$
25. z^2+2z+1
26. $y^2-10y+25$
27. $4a^2-4a+1$

*28. $\frac{1}{4}x^2+x+1$

$\left[\text{संकेत : } \frac{1}{4}x^2+x+1=\frac{1}{4}(x^2+4x+4)\right]$

*29. $\frac{1}{25}y^2-\frac{4}{5}y+4$

30. $a^4-4a^2b^2+4b^4$

31. $x^4+16y^4-8x^2y^2$

32. $3a^2-18ab+27b^2$

33. $2ay^2-24ay+72a$

34. $25a^2+140ab+196b^2$

35. $(m+3n)^2-14(m+3n)+49$

36. $(5x+3y)^2-20x-12y+4$

37. $(a^4-8a^2b^2+16b^4)-81$

38. $49-x^2-9y^2+6xy$

39. $x^2+8xy+16y^2-9z^2$

40. $4x^2-4y^2+12yz-9z^2$

मुख्य संकल्पनाएँ

एक एकपदी और एक बहुपद का गुणन

द्विपद का वर्ग

दो संख्याओं के योग और अन्तर का गुणनफल

दो वर्गों के अन्तर का गुणनखंडन

पूर्ण वर्ग त्रिपदों का गुणनखंडन

विविध प्रश्नावली III

(एकक IX और X पर)

1. निम्न संख्याओं में से प्रत्येक का आधार और घातांक लिखिए :

(i) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{-3}{8}\right)^2$

(iii) $(5)^5$ (iv) $(19)^6$

(v) $\frac{-20}{21}$

2. निम्न में से प्रत्येक को घातांकीय संकेतन में लिखिए :

(i) $4 \times 4 \times 4 \times 4$

(ii) $\frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13} \times \frac{6}{13}$

(iii) $(-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3) \times (-2.3)$

(iv) 59×59

(v) $\frac{3}{13}$

3. $\frac{256}{625}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

4. $\frac{1}{1296}$ को दो विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

5. $\frac{1}{64}$ को तीन विभिन्न प्रकार से घातांकीय संकेतन में लिखिए।

6. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) 4^4 (ii) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$

7. निम्न कथनों में से कौन-कौन से कथन सत्य हैं ? सकारण उत्तर दीजिए।

(i) $3^2 \times 3^3 = 3^5$

(ii) $\left(\frac{-2}{7}\right)^4 \times \left(\frac{-2}{7}\right) = \left(\frac{-2}{7}\right)^4$

(iii) $(-4)^2 \times (-4)^4 = (-4)^8$

(iv) $5^8 \times 5^3 \times 5^2 = 5^{13}$

(v) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \div \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$

(vi) $8^4 \div 8^6 = 8^2$

(vii) $\left(\frac{5}{11}\right)^5 \div \left(\frac{5}{11}\right)^0 = \left(\frac{5}{11}\right)^5$

8. निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $3^5 \times 3$ (ii) $(-6)^8 \div (-6)^5$

(iii) $\frac{4^3 \times 4^6}{(4^7 \times 4^0)}$ (iv) $\frac{(-3)^5}{(-3)^3} \div \frac{(-3)^6}{(-3)^5}$

(v) $\frac{25^6}{(625)^2}$ (vi) $\frac{9^8}{3^{17}}$

(vii) $(3^2)^3$ (viii) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^0$

9. रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) $x^2 \times x^3 = \ldots$ (ii) $x^2 \times \ldots = x^8$

(iii) $x^6 \times \ldots = x^6$ (iv) $\ldots \times x^{12} = x^{20}$

(v) $2y^5 \times \ldots = 8y^{11}$ (vi) $\frac{5}{9}y^{16} \times \ldots = \frac{9}{5}y^{16}$

(vii) $\left(\frac{3}{8}x^8\right) \times \left(\frac{8}{9}x^3\right) \times \ldots = 5x^{15}$

10. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$(-2.6)^5(-2.6)^8 = (-2.6)^{3a+1}$ हो।

11. 'b' ज्ञात कीजिए ताकि

$6^3 \times 6^5 \times 6^2 = 6^{5b-5}$ हो।

12. 'a' ज्ञात कीजिए ताकि

$7^7 \div 7^2 = 7^{a+3}$ हो।

13. 'b' ज्ञात कीजिए ताकि

$\frac{(2.5)^4 \times (2.5)^8}{(2.5)^6 \times 6.25} = (2.5)^{b+3}$ हो।

14. यदि $(3^5)^6 = 3^{4a+2}$ हो, तो 'a' ज्ञात कीजिए।

15. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $\frac{-5}{8}\left(\frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{5}x + 2\right)$

(ii) $3x^2\left(2x^2 - \frac{1}{3}\right)$

(iii) $-7y^2(3y - 6y^3 + 5 - 8y^4)$

(iv) $-3(6a^2 - 8a^3 + 2a - a^5)a^3$

16. दर्शाए गए गुणन कीजिए और समान पदों को जोड़िए :

(i) $5y^3(3y^2-\frac{1}{5}y^3+3)-2y^2(y^4-5y^2)$

(ii) $x^2(2x^2-3x+2)-2x^3(2x-3x^4)-3(x-2)+x^2(-x^5-x^3)$

(iii) $\frac{-3}{2}(4y-6)+8+3y^2(2y+5-3y^2)-y(y^2-2+y^3)$

(iv) $y(-3y+2)-8y^3-y^2(-3+2y)+8y^3(1-3y)+5$

17. रिक्त स्थान भरिए :

(i) $(3x+8y)^2=9x^2+64y^2+\ldots$

(ii) $(x-5y)^2=x^2-\ldots+25y^2$

(iii) $(2z^2-3y^3)^2=4z^4+9y^6-\ldots$

(iv) $(5x-7y)(5x+7y)=25x^2-\ldots$

(v) $(a^2b^2-c^2d^2)(a^2b^2+c^2d^2)=\ldots-\ldots$

(vi) $a^2-9b^2=(a+\ldots)(\ldots-3b)$

(vii) $4x^2-25y^2=(\ldots+5y)(\ldots-5y)$

18. निम्न गुणनफल ज्ञात कीजिए :

(i) $(3y-4z)^2$ (ii) $(5x^2+6y^2)^2$

(iii) $\left(\frac{1}{2}m^2n-m\right)^2$ (iv) $(2x-5)(2x+5)$

(v) $\left(\frac{1}{5}y^2-z^2\right)\left(\frac{1}{5}y^2+z^2\right)$

(vi) $(4x-3)(2x+5)$ (vii) $(5x^2-y)(3x^2+y)$

(viii) $\left(\frac{1}{3}y^3 - x^2\right)\left(6y^3 + 3x^2\right)$

(ix) $(4a^2b^2 - 3ab)(2a^2b^2 + 5ab)$

(x) $(2x - 5y - 2)^2$

(xi) $(y^2 - 3y + 1)^2$

(xii) $[(3a + 4b) - 1]^2$

(xiii) $[(2a - 3b) + 2][(2a - 3b) - 2]$

(xiv) $(a - 3b + 5)(a - 3b - 3)$

(xv) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 - 2x - 3)$

(xvi) $(2x + 5y - 3)(2x - 5y + 3)$

19. विशेष गुणनफलों के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्न में से प्रत्येक को परिकलित कीजिए :

(i) 999^2 (ii) 81^2

(iii) $68^2 - 58^2$ (iv) $198^2 - 98^2$

(v) $\frac{58^2 - 38^2}{96}$ (vi) 67×73

(vii) 38×42

20. यदि $98^2 - 88^2 = 4p$ दिया हुआ हो तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए ।

21. यदि $536^2 - 136^2 = 25p$ दिया हुआ हो तो 'p' का मान ज्ञात कीजिए ।

22. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $3x^2 + 5x + 8x^3$ (ii) $-5x^3 + 15x^4 + 10x^2$

(iii) $7x^3 + 49x^2$ (iv) $6(3y + 2z) - 3a(3y + 2z)$

(v) $5x(2 - a) - 15x^2(2 - a)$

23. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $16x^2y^2-25$

(ii) $25a^2b^2-36c^2d^2$

*(iii) $\frac{16}{25}x^2-\frac{49}{9}y^2$

*(iv) $\frac{1}{36}x^2-\frac{4}{9}z^2$

(v) $9x^2-(2x+5y)^2$

(vi) $(a^2b^2-9c^2d^2)^2-4m^2n^2$

24. पूर्ण वर्ग त्रिपदों के दो उदाहरण दीजिए ।

25. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) x^2+4x+4

(ii) $4x^2-20x+25$

(iii) $9x^2-42x+49$

(iv) $x^2-12x+36$

(v) $2x^2y^2+8xy+8$

(vi) $p^2q^2-2pqxy+x^2y^2$

*(vii) $\frac{1}{4}x^2-\frac{5}{3}x+\frac{25}{9}$

26. पूर्णतया गुणनखंडन कीजिए :

(i) $16x^4+48x^2y^2+36y^4$

(ii) $16m^4-72m^2+81$

(iii) $(2x-5y)^2+6(2x-5y)+9$

(iv) $4x^2-12xy+9y^2-4x^2y^2$

(v) $16a^2-9x^2+12xy-4y^2$

(vi) a^4-16b^4

एकक XI

सूत्र और उनके उपयोग

इस एकक में हम कुछ ऐसे सूत्रों का अध्ययन करेंगे जिनका उपयोग हम गणित और संबंधित क्षेत्रों में करते हैं। सूत्रों को व्यक्त करने के लिए प्राय: बीजीय व्यंजकों का उपयोग किया जाता है। जब संख्याओं के विभिन्न समुच्चयों (sets) में एक ही प्रकार के परिकलन बार-बार करने होते हैं, तो यह उपयोग बहुत ही लाभप्रद रहता है।

11.1 भूमिका

हम पिछली कक्षाओं में कुछ सूत्रों के विषय में पहले ही पढ़ चुके हैं तथा उनका उपयोग भी कर चुके हैं। क्या आपको, उदाहरणार्थ, निम्न के बारे में याद है ?

$I=prt$ (साधारण ब्याज के लिए सूत्र)

$A=l\times b$ (आयत के क्षेत्रफल के लिए सूत्र)

$F-E+V=2$ (सरल बहुफलक के लिए ऑयलर का सूत्र)

$P=2(l+b)$ (आयत की परिमाप के लिए सूत्र)

अब हम कुछ और सूत्रों और उनके उपयोगों पर विचार करते हैं।

11.2 तापमान को °C से °F में बदलना

निश्चय ही आप जानते हैं कि किसी पदार्थ का तापमान सेंटीग्रेड (**Centigrade**) [अथवा सेलसियस* (**Celsius**)] और फारेनहाइट (**Fahrenheit**) में से किसी भी एक पैमाने में मापा जा सकता है। उदाहरणार्थ, पानी $0°C$ अथवा $32\ °F$ पर जमता (freeze) है। पानी का क्वथनांक (boiling point) $100°C$ अथवा $212°F$ है।

एक पैमाने से दूसरे पैमाने में तापमान निम्न सूत्र से बदला जा सकता है :

$$C=\frac{5}{9}\left(F-32\right),$$

जहाँ C पदार्थ का अंश (degree) सेलसियस (अथवा सेंटीग्रेड) में तापमान है तथा F अंश फारेनहाइट में तापमान है।

[पाठक को चाहिए कि वह जाँच करे कि जब $F=32$ तो $C=0$ है। साथ ही यह कि जब $F=212$ तो $C=100$ है।]

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : निम्न तापमानों को सेलसियस पैमाने में बदलिए :

(*i*) $50°F$ (*ii*) $-4°F$

हल : (*i*) हम सूत्र $C=\frac{5}{9}\left(F-32\right)$ में $F=50$ प्रतिस्थापित करते हैं।

हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C=\frac{5}{9}(50-32)=10$$

इस प्रकार, $50°F=10°C$

---

*तकनीकी प्रयोग में सेंटीग्रेड शब्द की अपेक्षा सेलसियस को प्राथमिकता दी जाती है। यह पैमाना स्वीडन के एक खगोलज्ञ एन्डर्स सेलसियस (1701-1744) ने निकाला था और इसलिए इसका नाम सेलसियस पड़ा।

(*ii*) हम सूत्र $C=\frac{5}{9}(F-32)$ में $F=-4$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C=\frac{5}{9}(-4-32)=-20$$

इस प्रकार, $\quad -4°F=-20°C$

उदाहरण 2 : निम्न तापमानों को फ़ारेनहाइट पैमाने में बदलिए :

(*i*) $40°C$ $\qquad$ (*ii*) $-20°C$

हल : (*i*) हम सूत्र $C=\frac{5}{9}(F-32)$ में $C=40$ प्रतिस्थापित करते हैं। हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$40=\frac{5}{9}(F-32) \qquad (1)$$

हमें F के लिए (1) को हल करने की आवश्यकता है। (1) के दोनों पक्षों को $\frac{9}{5}$ से गुणा करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$72=F-32$$

जिससे, $\quad F=104$

इस प्रकार, $\quad 40°C=104°F$

(*ii*) उपर्युक्त विधि का अनुसरण करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$-20=\frac{5}{9}(F-32)$$

इस प्रकार, $\quad -36=F-32$

जिससे, $\quad F=-4$

इस प्रकार, $\quad -20°C=-4°F$

उदाहरण 3 : एक 'स्वस्थ' व्यक्ति का 'सामान्य' (normal) तापमान $98.4°F$ होता है। इसे सेलसियस पैमाने में व्यक्त कीजिए।

हल : हमें $F=98.4$ दिया हुआ है। सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$C=\frac{5}{9}\left(98.4-32\right)=\frac{332}{9}$$

$$=36.9 \text{ (लगभग)}$$

इस प्रकार, $98.4°F=36.9°C$ (लगभग)

प्रश्नावली 11.1

1. निम्न तापमानों को सेलसियस पैमाने में बदलिए :

(i) $25°F$ (ii) $32°F$ (iii) $-40°F$
(iv) $36°F$ (v) $75°F$ (vi) $212°F$
(vii) $59°F$ (viii) $0°F$

2. निम्न तापमानों को फ़ारेनहाइट पैमाने में बदलिए :

(i) $36°C$ (ii) $-10°C$ (iii) $30°C$
(iv) $32°C$ (v) $-75°C$ (vi) $-4°C$

11.3 एक स्थिर चाल से गतिमान वस्तु द्वारा तय की गई दूरी

एक बस 40 किलोमीटर प्रति घंटे की एक स्थिर चाल से चल रही है। वह, उदाहरणार्थ, 2 घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ? स्पष्ट है कि वह $80(=40\times 2)$ किलोमीटर की दूरी तय करेगी। वह, उदाहरणार्थ, $3\frac{1}{2}$ घंटे में कितनी दूरी तय करेगी ? स्पष्ट है, वह $140\left(=40\times\frac{7}{2}\right)$ किलो-

मीटर की दूरी तय करेगी। इसका तात्पर्य यह हुआ कि

यदि एक वस्तु v कि० मी०/घंटा की एक स्थिर चाल से चल रही है तो, उदाहरणार्थ, t घंटे में उसके द्वारा किलोमीटरों में चली दूरी s निम्न होती है :

$$s=vt$$

हम कुछ उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 1 : एक साइकिल सवार 200 मी०/मिनट की एक स्थिर चाल से चल रहा है। वह 1 घंटे में कितनी दूरी चलेगा ?

हल : यहाँ $v=200$ मी०/मिनट तथा $t=60$ मिनट है।

इस प्रकार, $s=200\times 60=12000$ मी०

$=12$ किलोमीटर

अतः साइकिल सवार 1 घंटे में 12 किलोमीटर की दूरी चलता है।

उदाहरण 2 : एक बस 2 घंटे 30 मिनट में 90 कि० मी० चलती है। यह मानते हुए कि बस एक स्थिर चाल से चल रही है, उसकी चाल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $s=90$ कि० मी० तथा $t=\frac{5}{2}$ घंटे है।

इस प्रकार, $90=\frac{5}{2}v$

जिससे, $v=36$

अतः बस 36 कि० मी०/घंटे की स्थिर चाल से चल रही है।

प्रश्नावली 11.2

1. एक कीड़ा, एक स्थिर चाल से, 1.5 मीटर की दूरी 2 घंटे और 30 मिनट में रेंगता है। कीड़े की चाल निर्धारित कीजिए।
2. ऐक साइकिल सवार 15 कि० मी०/घंटे की एक स्थिर चाल से चल रहा है। वह 65 किलोमीटर चलने में कितना समय लेगा ?

3. एक रेलगाड़ी 68 कि० मी० /घंटे की एक स्थिर चाल से चल रही है। वह 3 घंटे और 15 मिनट में कितनी दूरी तय करेगी ?

4. निम्न में से प्रत्येक में दर्शाई गई राशि ज्ञात करने के लिए सूत्र $s=vt$ का प्रयोग कीजिए :

(i) $v=40$ मी०/सैकेन्ड, $t=10$ मिनट; $s=?$

(ii) $s=315$ कि० मी०, $v=60$ कि० मी०/घंटा; $t=?$

(iii) $v=5280$ कि० मी०/घंटा, $s=33\times10^4$ कि० मी०; $t=?$

(iv) $s=72.9$ मी०, $t=3$ घंटे 20 मिनट; $v=?$

(v) $s=225$ कि० मी०, $t=45$ मिनट; $v=?$

11.4 कुछ और सूत्र

नीचे प्रश्नावली 11.3 में हम कुछ और सूत्रों तथा उनके उपयोगों पर विचार कर रहे हैं।

प्रश्नावली 11.3

1. किसी वर्ग की परिमाप P निम्न सूत्र से प्राप्त होती है :

$$P=4l$$

जहाँ l वर्ग की एक भुजा है। P और l दोनों एक ही मात्रकों में मापे जाते हैं।

(क) उस वर्ग की परिमाप ज्ञात कीजिए जिसकी भुजा 32 मीटर है।

(ख) 2.60 रु० प्रति मीटर की दर से 112 मीटर की भुजा के एक वर्गाकार खेत के चारों ओर तार लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

2. आप घन (cubes) और घनाभों (cuboids) से पहले से ही परिचित हैं। आप, अगली कक्षाओं में, पढ़ेंगे कि इनके आयतन (volumes) किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। यहाँ हम केवल वाँछित सूत्र ही दे रहे हैं।

घनाभ का आयतन V निम्न सूत्र से प्राप्त होता है :

$$V=lbh$$

जहाँ l, b और h क्रमशः घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई हैं।

(क) उस घनाभ का आयतन ज्ञात कीजिए जिसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 4 सें० मी०, 2 सें० मी० और 3 सें० मी० हैं।

(ख) उस घनाभ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए जिसका आयतन 19.5 घन सेंटीमीटर है तथा जिसकी लम्बाई और चौड़ाई क्रमशः 12 सें० मी० और 6.5 सें० मी० हैं।

(ग) घन में लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई बराबर होती हैं। उस घन का आयतन ज्ञात कीजिए जिसका एक किनारा (edge) 4 सें० मी० है।

3. **अब हम उस त्रिभुज के क्षेत्रफल A के लिए सूत्र लिख रहे हैं जिसका आधार b तथा ऊँचाई h है। यह क्षेत्रफल निम्न होता है :**

$$A=\frac{1}{2}bh$$

(क) उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका आधार 5 सें० मी० है तथा ऊँचाई 12 सें० मी० है।

(ख) एक त्रिभुजाकार खेत का आधार 120 मीटर है तथा ऊँचाई 136 मीटर। 32 पैसे प्रति वर्ग मीटर की दर से खेत पर छिड़काव लगाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

(ग) यदि $A=509.6$ वर्ग मीटर, $b=56$ मीटर हो, तो h ज्ञात कीजिए।

4. किसी संख्या, उदाहरणार्थ, $x+\frac{1}{2}$ का वर्ग मस्तिष्क में ही निम्न सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है :

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=x(x+1)+\frac{1}{4}$$

उदाहरणार्थ, $\left(4+\frac{1}{2}\right)^2=\left(4\times 5\right)+\frac{1}{4}=20.25$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग करते हुए, निम्न को ज्ञात कीजिए :

(क) $(9.5)^2$ (ख) $(11.5)^2$

(ग) $(75)^2$ (घ) $(24.5)^2$

5. हम अगली कक्षाओं में सिद्ध करेंगे कि प्रथम n धनपूर्णांकों के योग S के लिए सूत्र

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

होता है। उदाहरणार्थ, $1+2+3+4=\frac{4(5)}{2}=10$

इसी प्रकार, $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=\frac{10(11)}{2}=55$

इस सूत्र का निम्न को ज्ञात करने में प्रयोग कीजिए :

(क) प्रथम 20 धनपूर्णांकों का योग। वास्तविक जोड़ से जाँच भी कीजिए।

(ख) प्रथम 100 धनपूर्णांकों का योग।

6. उस वृत्त का क्षेत्रफल A जिसकी त्रिज्या r है निम्न सूत्र से प्राप्त होता है :

$$A = \pi r^2,$$

जहाँ हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

(क) उस वृत्ताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 9.8 मीटर है।

(ख) उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 14 सें० मी० है।

7. उस वृत्त की परिधि C जिसकी त्रिज्या r है निम्न सूत्र से प्राप्त होती है :

$$C = 2\pi r,$$

जहाँ, पुनः, हम π का मान $\frac{22}{7}$ लेते हैं।

(क) उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए जिसका व्यास 14 सें० मी० है।

(ख) उस वृत्ताकार खेत की परिधि ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 9.8 मीटर है। 3 20 रु० प्रति मीटर की दर से खेत पर बाड़ लगाने का व्यय भी ज्ञात कीजिए।

(ग) 1980 मीटर की दूरी दौड़ने के लिए किसी व्यक्ति को 42 मीटर व्यास वाले एक वृत्ताकार मैदान के कितने चक्कर लगाने पड़ेंगे ?

*परिशिष्ट I

दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में हम सदैव एक अन्य परिमेय संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

मान लीजिए $\frac{a}{b}$ और $\frac{c}{d}$ कोई दो (भिन्न) परिमेय संख्याएँ हैं। चूंकि हमें परिमेय संख्याओं की तुलना करनी पड़ेगी इसलिए आइए यह मान लें कि हर धनात्मक हैं। अर्थात् $b>0$ और $d>0$ है।

चूंकि ये भिन्न (अर्थात् असमान) हैं, अतः इनमें से एक, दूसरे से बड़ा होना चाहिए। मान लीजिए कि $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ $\left(\text{अर्थात् } \frac{c}{d}<\frac{a}{b}\right)$ है।

आइए संख्या $\dfrac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{2}$ अर्थात् $\dfrac{ad+bc}{2bd}$ पर विचार करें जो कि दी हुई संख्याओं का औसत (average) है। हम सिद्ध करना चाहते हैं कि

$$\frac{c}{d}<\frac{ad+bc}{2bd} \text{ और } \frac{ad+bc}{2bd}<\frac{a}{b}$$

हम देखते हैं कि $\frac{c}{d}=\frac{2bc}{2bd}$

इस प्रकार $\frac{c}{d}$, $\frac{ad+bc}{2bd}$ से कम तभी होगा जबकि

$2bc<ad+bc$ हो। (क्यों ?)

क्या $2bc<ad+bc$ है ?

प्रत्येक पक्ष में से bc घटाइए। हमें $bc<ad$ प्राप्त होता है जो कि, निस्संदेह, सत्य है क्योंकि हमने यह मानकर प्रारम्भ किया है कि $\frac{c}{d}<\frac{a}{b}$। इस प्रकार, हमने दिखा दिया है कि $\frac{c}{d}<\frac{ad+bc}{2bd}$। इसी प्रकार, हम दिखा सकते हैं कि $\frac{ad+bc}{2bd}<\frac{a}{b}$।

इस प्रकार, हमने दी हुई दो (भिन्न) परिमेय संख्याओं के बीच में एक परिमेय संख्या $\frac{ad+bc}{2bd}$ (अर्थात् दी हुई परिमेय संख्याओं का औसत) ज्ञात कर ली है।

उत्तरमाला

प्रश्नावली 1.1

1. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{4}{7}$ (iv) $\frac{2}{9}$ (v) $\frac{11}{60}$;
2. (i) चार पाँचांश (ii) नौ दशांश (iii) तीन सातांश
(iv) सोलह सत्रहांश ; 3. (i) $\frac{1}{60}$ (ii) $\frac{1}{1000}$ (iii) $\frac{1}{1000}$
(iv) $\frac{1}{20}$ (v) $\frac{1}{100}$; 4. (i) 2, 3 (ii) 101, 10 (iii) 56, 87 (iv) —5, 7
(v) 8, 1 ; 5. 272 ; 6. $\frac{9999}{100}$; 7. $\frac{5}{2}$ रु० ; 8. $\frac{5025}{2}$ रु० ;
9 $\frac{25}{2}$

प्रश्नावली 2.1

1. (i), (ii) और (v) ; 3. $\frac{-5}{3}, \frac{22}{10}, \frac{729}{27}$; 4. $\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-8}{3}$,
$\frac{109}{292}, \frac{11}{17}$

प्रश्नावली 2.2

1. (i) धनात्मक, दाईं (ii) ऋणात्मक, बाईं (iii) ऋणात्मक, बाईं
(iv) ऋणात्मक, बाईं (v) धनात्मक, दाईं

प्रश्नावली 2.3

2. (i) $\frac{11}{2}$ (ii) $\frac{-186}{13}$ (iii) $\frac{-1139}{131}$ (iv) $\frac{-40008}{149}$ (v) $\frac{17}{3}$
(vi) $\frac{355}{29}$ (vii) $\frac{-20444}{1001}$; 3. (i) $\frac{29}{170}$ (ii) $\frac{77}{144}$ (iii) $\frac{34}{171}$
(iv) $\frac{-173}{72}$ (v) $\frac{37}{5}$ (vi) $\frac{13}{2}$ (vii) $\frac{-73}{81}$ (viii) $\frac{-395}{77}$ (ix) $\frac{-569}{80}$
(x) $\frac{50054}{6461}$; 4. (i) $\frac{131}{78}$ (ii) $\frac{69}{143}$ (iii) $\frac{5}{6}$ (iv) $\frac{97}{60}$ (v) $\frac{796}{385}$
(vi) $\frac{137}{26}$ (vii) $\frac{47}{5}$ (viii) $\frac{1313}{120}$ (ix) $\frac{191}{44}$ (x) $\frac{29}{6}$; 5. $\frac{137}{60}$;
6. $\frac{3}{4}$

प्रश्नावली 2.4

1. (i) $-\frac{2}{7}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (iii) $\frac{3}{7}$ (iv) $-\frac{2}{3}$ (v) $\frac{5}{4}$;
2. (i) $-\frac{62}{63}$ (ii) $-\frac{289}{420}$ (iii) $-\frac{113}{10}$ (iv) $\frac{82}{17}$ (v) $\frac{129}{143}$
(vi) 0 (vii) $\frac{5}{6}$ (viii) $-\frac{3}{8}$ (ix) $\frac{2388}{121}$ (x) $\frac{175}{13}$; 3. (i) $\frac{7}{12}$
(ii) $-\frac{479}{234}$ (iii) $\frac{8}{21}$ (iv) $\frac{6547}{7130}$; 4. $-\frac{62}{117}$, $\frac{62}{117}$, नहीं;
5. $\frac{949}{770}$, $-\frac{151}{770}$, नहीं; 6. $\frac{220}{441}$; 7. $\frac{1}{4}$

प्रश्नावली 3.1

1. (i) $\frac{21}{16}$ (ii) $-\frac{319}{30}$ (iii) $\frac{590}{57}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{730}{111}$ (vii) $-\frac{730}{111}$;
2. (i) $-\frac{27}{77}$ (ii) $\frac{19}{16}$ (iii) $\frac{8576}{10849}$ (iv) 1 (v) -1 (vi) $\frac{39512}{40501}$
(vii) 75 ; 4. (i) $-\frac{23}{47}$ (ii) $\frac{18}{31}$; 5. (i) $\frac{5}{12}$ (ii) $-\frac{17}{13}$
(iii) $-\frac{1}{18}$ (iv) $-\frac{1377}{275}$ (v) $\frac{252}{337}$ (vi) $\frac{2000}{297}$ (vii) $\frac{288}{55}$
(viii) 0 ; 7. (i) $\frac{cf+ed}{df}$ (ii) $\frac{acf+aed}{bdf}$ (iii) $\frac{ac}{bd}, \frac{ae}{bf}$;
8. $-\frac{989}{11340}$; 9. 30 ; 10. $\frac{705}{8}$ क्विंटल

प्रश्नावली 3.2

1. (i) $\frac{7}{5}$ (ii) $-\frac{7}{5}$ (iii) $-\frac{12}{11}$ (iv) 1 (v) -1 ; 2. (i) 1 (ii) 1
(iii) 1 (iv) 1 (v) 1 ; 3. $-\frac{9}{68}$; 4. $-\frac{48}{35}$

प्रश्नावली 3.3

1. (i) $\frac{11}{21}$ (ii) $\frac{16}{81}$ (iii) $\frac{-66}{65}$ (iv) -1 (v) $\frac{49}{288}$ (vi) 15 (vii) $\frac{192}{427}$
(viii) $\frac{-21}{5}$ (ix) $\frac{1224}{103}$; 3. (i) $\frac{21}{22}$ (ii) $\frac{-374}{81}$ (iii) $\frac{48}{245}$ (iv) $\frac{-3}{8}$;
4. $\frac{253}{1231}, \frac{161}{11}$; 5. $\frac{7}{5}, \frac{7}{20}$, नहीं

प्रश्नावली 3.4

1. (i) $\frac{3}{11}$ (ii) $\frac{-5}{8}$ (iii) $\frac{7}{25}$ (iv) 0 (v) $\frac{120}{110}$ (vi) $\frac{-8}{7}$; 2. $\frac{5}{2}$, $\frac{11}{10}$, $\frac{-10}{9}$, $\frac{-8}{7}$, $\frac{8}{-3}$; 3. $\frac{9}{-5}$, $\frac{-5}{4}$, $\frac{-6}{5}$, $-\frac{7}{6}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{8}{11}$;
4. $\frac{18}{39}$, $\frac{233}{457}$, $\frac{131}{202}$, 0, $\frac{162}{961}$

प्रश्नावली 3.5

4. हाँ

विविध प्रश्नावली I

(एकक I, II और III पर)

1. (i), (iii), (v), (vi), (vii) और (ix) ; 2. 613 ; 4. (i) $\frac{21}{10}$ (ii) $\frac{45}{68}$ (iii) $\frac{-11}{4}$ (iv) -4 ; 6. (i) $\frac{290}{143}$ (ii) $\frac{241}{20}$ (iii) $\frac{-355}{42}$ (iv) $\frac{17}{600}$ (v) $\frac{1024}{85}$ (vi) $\frac{65}{36}$; 7. (i) $\frac{14}{11}$ (ii) $-\frac{353}{5}$ (iii) $\frac{9}{16}$ (iv) $\frac{11}{210}$ (v) $\frac{479}{210}$ (vi) $\frac{1343}{210}$; 8. (i) $-\frac{312}{95}$ (ii) -7 (iii) $\frac{1}{5}$; 9. $\frac{11}{3}$;
10. $-\frac{74}{129}$; 11. (i) $-\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{288}{95}$ (iii) $\frac{575}{49}$ (iv) $\frac{12320}{81}$

(v) $-\frac{203553}{25}$ (vi) 0; **13.** $\frac{13}{115}$; **14.** (i) $\frac{7}{30}$ (ii) $\frac{1}{3}$ (iii) $\frac{16}{5}$ (iv) $\frac{91}{101}$ (v) 0; **15.** $-\frac{7}{4}$; **16.** $\frac{7}{2}$; **17.** (i) $\frac{1156}{49}$ (ii) $-\frac{1}{12}$ (iii) -91 (iv) $\frac{1}{5}$ (v) -33750; **18.** (i) $\frac{7}{8}$ (ii) $\frac{19}{20}$ (iii) $-\frac{15}{16}$ (iv) $-\frac{117}{108}$; **19.** (i) $>$ (ii) $<$ (iii) $>$ (iv) $=$; **20.** $-\frac{5}{2}$, $\frac{-7}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{5}$; **21.** $\frac{17}{4}$, $\frac{25}{6}$, 3, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{-17}{33}$, $\frac{-28}{44}$; **22.** $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$, $\frac{19}{11}$; **23.** 9; **27.** 1, 3; **28.** $-3, -1, 1, 3$

प्रश्नावली 4.1

1. (i) $3\times1+\frac{5}{10}$ (ii) $2\times10+8\times1+\frac{3}{10}+\frac{7}{10^2}$ (iii) $2\times10^2+1\times10+5\times1+\frac{5}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{2}{10^3}$ (iv) $1\times10^3+5\times10^2+1\times1+\frac{1}{10^2}+\frac{3}{10^3}$ (v) $2\times10^3+3\times10^2+9\times10+5\times1+\frac{2}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^4}+\frac{7}{10^5}$ (vi) $9\times10^2+9\times10+9\times1+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{9}{10^4}$; **2.** (i) $\frac{356}{5}$ (ii) $\frac{477}{25}$ (iii) $\frac{28251}{250}$ (iv) $\frac{37}{10000}$ (v) $\frac{611272}{625}$; **3.** (i) 18.892, 18.8922, 19.05, 19.3 (ii) 0.09, 0.099, 0.1, 0.937, 1.001 (iii) 5.002, 5.02, 5.119, 5.19, 5.2, 5.219; **4.** (i) 1.01, 1.001, 0.10, 0.01, 0.001 (ii) 1103.01, 1103.001, 999.099, 110.3001 (iii) 23.9255, 23.925, 23.9249, 23.92249, 22.9925; **5.** (i) 9.678 (ii) 16.874 (iii) 463.82032 (iv) 12656.27611 (v) 10285.79659; **6.** (i) -0.2966 (ii) -4.69193 (iii) -254.6988 (iv) -229.72419

(v) 297.085804; 7. (i) 0.75 (ii) 8.6 (iii) 6.15 (iv) 50.625 (v) 0.1 (vi) 0.01 (vii) 0.005 (viii) 875.25; **8.** (i) 12.8 (ii) −35.15 (iii) 5.0424 (iv) 95 (v) 6736.61232 (vi) 284160.9375 (vii) 0.000003033792; **10.** (i) 4.51 (ii) 36.15 (iii) 2000.1 (iv) 0.005 (v) 105000 (vi) 1460.25 (vii) 7.28; **12.** (i) 24.596 (ii) 24.596 (iii) 24.596 (iv) 245.96 (v) −0.063 (vi) 2.1826 (vii) 0.23071 (viii) 9.2144 (ix) 2873.5875 (x) −70; **13.** 1.234; **14.** (i) 4195.714 (ii) 9.406 (iii) 3.519 (iv) 5890; **15.** 6.15 रु०; **16.** 0.105 कि०ग्रा०; **17.** 5.10 रु०; **18.** 44 कि०मी०; **19.** 580.30 रु०; **20.** 72.40 रु०; **21.** 1.05 क्विंटल, 5.25 क्विंटल; **22.** 32.81 मीटर

प्रश्नावली 5.1

1. (i) 0.2, सांत; (ii) 0.24, सांत; (iii) $0.8\overline{3}$, असांत आवर्ती; (iv) 0.65, सांत; (v) 2.56875, सांत; (vi) 34.625, सांत; (vii) 5.24, सांत; (viii) 10.65, सांत; (ix) $64.\overline{63}$, असांत आवर्ती; (x) $40.\overline{384615}$, असांत आवर्ती; (xi) $0.\overline{714285}$, असांत आवर्ती; (xii) $0.\overline{7}$, असांत आवर्ती

प्रश्नावली 5.2

1. (i) 0.65 (ii) 1.125 (iii) 0.09375; **2.** (i) 0.0209 (ii) 0.4938 (iii) 3.2666

प्रश्नावली 5.3

1. (i) सांत (ii) सांत (iii) सांत (iv) असांत आवर्ती (v) असांत आवर्ती (vi) असांत आवर्ती (vii) असांत आवर्ती; **2.** (i) −0.24375 (ii) −3.0546875 (iii) $-1.75\overline{6}$ (iv) $-0.8\overline{63}$

प्रश्नावली 6.1

1. (i), (ii), (v) और (vi); 2. (i) 1 (ii) 3 (iii) 50 (iv) 7 (v) 0 (vi) 5 (vii) n ; 3. 1.2, $\frac{1}{3}x^2$, $-3x^7$, $5x^{10}$, $\frac{2}{9}x^{11}$, $3.7x^{15}$; 4. $1.6y^{16}$, $\frac{6}{11}y^9$, $7y^8$, $-8y^5$, $2.3y^3$, -43; 5. (i) 3, $5-7y+\frac{3}{8}y^3$ (ii) 5, $8-\frac{5}{4}x^3+9x^5$ (iii) 4, $-7x+\frac{2}{3}x^2+\frac{3}{2}x^4$ (iv) 3, $-4+5x+\frac{4}{5}x^3$ (v) 7, $-20.5+3.2x-8x^2+12x^7$ (vi) 10, $50-\frac{7}{8}x^3+\frac{5}{3}x^6+\frac{3}{2}x^8-16x^9-5x^{10}$; 8. (i) 0 (ii) 1 (iii) 2 (iv) 3 (v) 4

प्रश्नावली 6.2

1. (i) $x+3x^2$ (ii) $7-\frac{14}{3}x^2+7x^3$ (iii) $-4-\frac{1}{3}x-x^2$ (iv) $-7+0.4x+0.7x^2+3.3x^3$ (v) $2-12x-4x^2+8x^4$ (vi) $15+2x^2+x^3$ (vii) $-\frac{1}{2}+\frac{7}{8}x+\frac{4}{5}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{2}x^4+x^5$ (viii) $\frac{163}{24}-\frac{13}{12}x+\frac{17}{2}x^2+\frac{1}{5}x^3$; 2. (i) $-16+2x^2-8x^3$ (ii) $-10+4x+5x^2-x^3-\frac{5}{4}x^4$ (iii) $35-x^2+x^3$ (iv) $15-12x+6x^2-x^3$ (v) $-\frac{8}{5}+\frac{28}{5}x+12x^2$; 3. (i) $13+5x+5.6x^2-\frac{29}{4}x^3$ (ii) $3-x-\frac{1}{5}x^2+7x^5$ (iii) $7+\frac{13}{3}x+\frac{7}{2}x^3+6x^4$ (iv) $\frac{11}{6}+x+\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{3}x^4$

(v) $6+\frac{19}{2}x^2-x^3+5x^4+3x^5$; 4. (i) $-\frac{2}{3}x^3+\frac{14}{3}x^4-\frac{13}{8}x^5$ (ii) $7+\frac{7}{6}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{20}x^5$ (iii) $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$ (iv) $1-a^2+2a^4$ (v) $-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}x+4x^2-5x^4$ (vi) $10+2x-21x^2-2x^3$ (vii) $16+14x^2+2x^3-7x^4+10x^5$;

5. $\frac{5}{2}-\frac{3}{4}x+\frac{1}{5}x^3-\frac{3}{2}x^4+\frac{5}{4}x^5+\frac{1}{3}x^6-\frac{1}{6}x^7$;

6. $-8-34x+\frac{45}{2}x^2+5x^3$; 7. (i) 0 (ii) $\frac{5}{6}+\frac{5}{3}x+10x^2+\frac{4}{5}x^3$ (iii) $-\frac{5}{12}-\frac{5}{6}x-5x^2-\frac{2}{5}x^3$; 8. (i) $\frac{1}{3}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$ (ii) $\frac{1}{3}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x$ (iii) $\frac{10}{21}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2+2x-4$ (iv) $\frac{10}{21}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{9}{4}x^2+2x-4$;

9. (i) $8x^4-\frac{7}{2}x^3+5x^2-2x+2$ (ii) $21x^4+\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{15}{2}$ (iii) $19x^4+\frac{3}{4}x^3+\frac{19}{2}x^2-17x-6$ (iv) $-\frac{5}{2}x^4-2x^3+4x^2-\frac{7}{2}x-2$; 10. $9-5x+\frac{29}{2}x^2-6x^3+4x^4$;

11. $-\frac{3}{7}x^5-\frac{2}{3}x^4-x^3+5x$; 12. $-2x^4-4x^3-\frac{14}{5}x^2+3x+\frac{11}{2}$

प्रश्नावली 6.3

1. (i) 0, —80, —80, $-\frac{5}{16}$ (ii) —1, —1, 17 (iii) $-\frac{13}{7}$ (iv) $-\frac{1}{2}$, $\frac{13}{10}$, —19 (v) $-\frac{3}{16}$, $\frac{57}{20}$; 2. (i) $-\frac{23}{6}$, $\frac{19}{6}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ (iii) —41 (iv) —1,0,0 (v) 0, $\frac{33}{32}$ (vi) 835, 1, $\frac{19}{7}$; 3. 55 ; 4. (i) 4 (ii) $\frac{7}{2}$ (iii) $\frac{13}{16}$ (iv) 0 (v) $\frac{11}{12}$;
5. 44.1, 122.5, 313.6, 1960

प्रश्नावली 7.1

1. $-\frac{9}{2}$; 2. 3 ; 3. $-\frac{51}{7}$; 4. $-\frac{7}{3}$; 5. $-\frac{11}{5}$; 6. $\frac{42}{31}$; 7. $-\frac{34}{35}$; 8. $\frac{184}{13}$; 9. —2 ; 10. $-\frac{144}{5}$; 11. 12 ; 12. $\frac{9}{8}$; 13. 5 ; 14. $-\frac{9}{8}$; 15. $-\frac{29}{19}$; 16. $\frac{45}{4}$; 17. $\frac{1}{8}$; 18. —2 ; 19. 9 ; 20. 21 ; 21. $\frac{1}{27}$; 22. $-\frac{5}{21}$; 23. $\frac{21}{50}$; 24. $-\frac{13}{15}$; 25. $\frac{2}{3}$; 26. 11 ; 27. 5

प्रश्नावली 7.2

1. 25 ; 2. 8.90 रु० ; 3. 4 ; 4. 90°, 40°, 50° ; 5. 6 सें०मी०, 8 सें०मी०, 8 सें०मी०; 6. 76800 रु० ; 7. $\frac{2}{9}$; 8. 210 रु० 3% पर , 5390 रु० 5% पर ; 9. 60 रु०, 50 रु०, 40 रु०; 10. 2.1 कि०मी०, 3.6 कि०मी०/घंटा, 4.2 कि०मी०/घंटा

प्रश्नावली 7.3

1. (i) $\frac{139}{50}$ (ii) $\frac{53}{400}$ (iii) $\frac{67723}{2500}$ (iv) $\frac{10101}{1000}$ (v) $\frac{1}{40000}$

(vi) $\frac{92091}{1000}$ (vii) $\frac{50035003}{10000}$; 2. (i) $\frac{25}{3}$ (ii) $\frac{38}{3}$
(iii) $\frac{1}{90}$ (iv) $\frac{560}{99}$ (v) $\frac{36}{11}$ (vi) $\frac{986}{33}$ (vii) $\frac{26}{495}$ (viii) $\frac{3}{1100}$
(ix) $\frac{20081}{9990}$

प्रश्नावली 8.1

2. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य ; 5. (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य ; 6. सत्य

प्रश्नावली 8.2

1. (क) नहीं (ख) हाँ ; 2. (क) और (ख) ; 4. 0, 1, 2, 3, 4, 5;
5. (i) $x \leqslant 2$ (ii) $y > 4$ (iii) $y \geqslant -2$ (iv) $x \geqslant \frac{18}{11}$ (v) $y < -\frac{1}{2}$
(vi) $x \geqslant -\frac{10}{3}$ (vii) $z > 1$ (viii) $x \leqslant -3$; 6. नहीं ;
7. (i) $y > \frac{21}{5}$ (ii) $x > 3$ (iii) $y \geqslant 6$ (iv) $x > 10$ (v) $y \leqslant \frac{1}{2}$
(vi) $y > 5$ (vii) $x < 1$; 8. 0, 1, 2, 3

विविध प्रश्नावली II

(एकक V, VI, VII और VIII पर)

1. (i) 0.1875 (ii) -0.144 (iii) $-2.\overline{142857}$ (iv) 0.440625 (v) $0.41\overline{6}$ (vi) -0.140625 ; 4. (i) 0.12 (ii) 0.6875 (iii) 0.175 ; 5. (i) 0.02884 (ii) -0.08482 (iii) 1.05666; 6. (i), (ii), (v) और (vi) ; 7. (i) 0 (ii) 3 (iii) 100 (iv) 1 (v) 19 (vi) 5 ; 9. $-26, \frac{7}{2}x^3, 23x^4, \frac{9}{7}x^5, 0.8x^8$;
10. $-5y^{15}, \frac{12}{11}y^7, -\frac{16}{13}y^6, \frac{43}{21}y^2$, 32 ; 11. (i) 3, $-\frac{5}{8}y^3 + 3y^2 + 5$ (ii) 5, $-\frac{2}{7}y^5 - 6y^4 + y^2 + \frac{13}{2}$ (iii) 5, $3.8x^5 - 2.5x^3$

$- 23x^2$ (iv) 8, $- 25x^8$, $- \frac{5}{18}x^5 + \frac{16}{9}x^3 + \frac{3}{5}x^2 + 16$; **12.** (i) $8 + \frac{21}{2}y - 2y^3 - \frac{3}{2}y^4$ (ii) $2x^5$ (iii) 10 (iv) $14 - 13x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{23}{2}x^3$ (v) $-\frac{19}{6} + 23x - x^2 + 3x^4$ (vi) $9 + \frac{1}{5}x^3 + \frac{3}{8}x^4$; **13.** (i) $\frac{7}{6} - \frac{31}{4}x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x^3$ (ii) $-11 + \frac{13}{3}x^2 + x^3 + \frac{5}{9}x^4$ (iii) $2 - 2x + x^2 + \frac{10}{13}x^3$ (iv) $-7 - x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{5}x^5$ (v) $3 - 2x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{8}{5}x^4 - \frac{9}{4}x^5$ **14.** (i) $-5 + 3x - x^2 + \frac{17}{11}x^3$ (ii) $8x + 7x^2 - \frac{1}{9}x^3 + 8x^4$ (iii) $7 + \frac{13}{3}x + \frac{2}{13}x^2 + \frac{9}{13}x^3 + \frac{1}{19}x^5$ (iv) $\frac{11}{2} + 2x + \frac{7}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + x^4$ (v) $\frac{25}{2} - 7x - 5x^3 - \frac{7}{6}x^4 + 4x^5$; **15.** (i) $17 + \frac{14}{19}x + \frac{13}{2}x^3 + \frac{34}{11}x^4 - 2x^5$ (ii) $\frac{2}{9}x - \frac{9}{17}x^2 - \frac{3}{5}x^3 - \frac{3}{2}x^4$ (iii) $-\frac{3}{2} - 4x - \frac{10}{11}x^3 + 4x^4$ (iv) $\frac{2}{5} - \frac{4}{3}x - x^2 - \frac{23}{4}x^5$; **16.** $-8 - \frac{1}{2}x^2 + 12x^3 - 3x^4$; **17.** $29 + \frac{34}{5}x - 10x^3 - \frac{11}{7}x^4$; **18.** (i) $-9 + 6x - \frac{9}{13}x^3 + \frac{15}{11}x^5$ (ii) $-1 + 4x + \frac{10}{9}x^2 - \frac{11}{13}x^3 + \frac{19}{11}x^5$; **19.** $-1 + \frac{8}{5}x - x^2 + \frac{27}{13}x^4 - \frac{3}{2}x^5$; **20.** $-\frac{3}{8} + \frac{7}{8}x^2 - 2x^3 + \frac{8}{19}x^4 - x^5$; **21.** (i) $\frac{5}{2}$, $\frac{31}{2}$, $\frac{43}{2}$ (ii) 8, -4 (iii) $\frac{2}{5}$, 162, 262 (iv) $\frac{13}{4}$; **22.** 225; **23.** (i) -64 (ii) $\frac{11}{12}$ (iii) $-\frac{56}{5}$ (iv) -2 (v) $\frac{2}{3}$ (vi) 2; **24.** $-\frac{2}{33}$; **25.** 1; **26.** $-\frac{5}{2}$: **27.** 1; **28.** 3; **29.** 5; **30.** 2; **31.** 4; **32.** 6; **33.** 6; **34.** 2; **35.** $\frac{15}{2}$; **36.** -1; **37.** -42;

38. $\frac{2}{3}$: **39.** $\frac{51}{53}$; **40.** $\frac{1}{2}$; **41.** 2; **42.** 4, 10, 45; **43.** 50°, 70°; **44.** $\frac{5}{8}$; **45.** 4 सें०मी०, 6 सें०मी० ; **46.** 1350 रु० 5% पर, 3000 रु० 6% पर ; **47.** 1.5 हैक्टेअर; **48.** 19.90 रु०; **49.** 6 वर्ष, 30 वर्ष ; **50.** (i) $\frac{133}{25}$ (ii) $\frac{25}{4}$ (iii) $\frac{5867}{100}$ (iv) $\frac{1}{4000}$ (v) $\frac{20053}{1000}$; **51.** (i) 6 (ii) $\frac{203}{9}$ (iii) $\frac{22}{9}$ (iv) $\frac{7}{1125}$ (v) $\frac{1241}{9900}$ (vi) $\frac{12389}{495}$; **52.** (i) और (iii) ; **53.** (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य (vi) असत्य (vii) असत्य (viii) सत्य ; **54.** (i), (ii) और (iv) ; **55.** नहीं; **56.** नहीं; **57.** (ii) और (iii); **59.** (i) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (ii) 0, 1 ; **60.** (i) $z < -\frac{1}{6}$ (ii) $x \leqslant \frac{8}{5}$ (iii) $x \leqslant \frac{1}{8}$ (iv) $y > \frac{1}{8}$ (v) $x \geqslant \frac{1}{2}$ (vi) $x < \frac{2}{3}$; **61.** (i) −1, 0, 1, 2 (ii) 20, 21, 22, 23, 24, 25

प्रश्नावली 9.1

1. (i) $\frac{3}{2}$, 4 (ii) 2, 6 (iii) $-\frac{5}{4}$, 3 (iv) $\frac{11}{8}$, 2 (v) $-\frac{5}{6}$, 20 (vi) $\frac{7}{5}$, 1 (vii) $\frac{132}{143}$, 0; **2.** (i) 2^6 (ii) $\left(-\frac{8}{5}\right)^3$ (iii) $\left(\frac{21}{11}\right)^6$ (iv) $\left(\frac{1}{5}\right)^1$ (v) $(2.07)^4$ (vi) $(-5.5)^5$ (vii) $(37)^4$ (viii) $\left(\frac{21}{4}\right)^1$; **4.** (i) $\frac{16}{9}$ (ii) $\frac{49}{64}$ (iii) $\frac{81}{16}$ (iv) 64 (v) $-\frac{125}{64}$ (vi) $\frac{121}{64}$ (vii) −2187 (viii) 1 (ix) 1 (x) 15.625 (xi) 2.8561 (xii) 0

प्रश्नावली 9.2

2. (ii), (iii), (v) और (vi) ; **3.** (i) 243 (ii) −10000000000000 (iii) $\frac{243}{1024}$ (iv) $\frac{4096}{15625}$ (v) $\frac{125}{343}$ (vi) 2.0736; **4.** 5; **5.** 8

प्रश्नावली 9.3

2. (iii) और (vi); **3.** (i) $\frac{1}{27}$ (ii) 4 (iii) 81 (iv) 64 (v) 54 (vi) 81 (vii) 100

(viii) 32 (ix) $\frac{1}{8}$ (x) $\frac{1}{125}$ (xi) 27 (xii) $\frac{1}{8}$ (xiii) $-\frac{2}{9}$; **4.** (i) 1 (ii) 3

प्रश्नावली 9.4

1. (i) 4096 (ii) $\frac{16}{2401}$ (iii) 4096 (iv) 729 (v) $\left(\frac{4}{5}\right)^{12}$ (vi) $(-9)^{30}$; **2.** 23 ; **3.** (i) 5^{20} (ii) 8^{23} (iii) $(0.1)^4$ (iv) $(2.2)^4$ (v) $\left(\frac{1}{2}\right)^{35}$ (vi) 7^{48} (vii) 5^{20} (viii) 9^6 (ix) 1 ; **4.** 2 ; **5.** 6

प्रश्नावली 10.1

1. x^{11}; **2.** y^8; **3.** a^3; **4.** a^{20}; **5.** $\frac{2}{3}x^{10}$; **6.** $-\frac{10}{77}y^{18}$; **7.** $\frac{3}{8}y^9$; **8.** $5b^4$; **9.** $12a^{14}$; **10.** $-48x^5$; **11.** $6d^{10}$; **12.** $6a^3+3a$; **13.** $\frac{3}{2}y^5-2y^4$; **14.** a^4+8a^3; **15.** $-\frac{3}{2}y^6-y^4$; **16.** $18y^4-12y^3$; **17.** $-12d^4+10d^7$; **18.** $14x^2+13x-12$; **19.** $\frac{1}{4}x^2-\frac{9}{16}$; **20.** $4x^2-2ax-2bx+ab$; **21.** $x^2+14x+49$; **22.** $9x^2-6x+1$; **23.** $\frac{1}{4}x^2-4x+16$; **24.** $x^2+3x+\frac{9}{4}$; **25.** $25x^2-9$; **26.** $3x^2+7x+2$; **27.** $x^4+2x^3+x^2$; **28.** $y^2+y^3+\frac{y^4}{4}$; **29.** $x^2-\frac{13}{3}x-\frac{10}{3}$; **30.** $\frac{x^3}{6}+\frac{5}{6}x^2+x$

प्रश्नावली 10.2

1. $y^4+8y^3-4y^2$: **2.** $-b^5-\frac{1}{4}b^4+\frac{3}{8}b^6$; **3.** $15x^4-21x^3+6x^2$; **4.** $2a^3-6a^2+10a$; **5.** $-6y^3-12y^4+9y^2-6y^5$; **6.** $\frac{1}{64}x^3+\frac{1}{8}x^2+x$;

7. $-7y^5+21y^4-7y^3-42y^2$; **8.** $-20p^6+12p^5-8p^4$; **9.** $-5a^5+3a^6-a^4-3a^3$; **10.** $-21a^5-15a^3+3a^4+3a^6-3a^7$; **11.** x^7; **12.** $-15b^4$; **13.** $12p^6$; **14.** $-12c^9+12c^4+15c^5$; **15.** $x^3+18x^2+8x-x^7-28$

प्रश्नावली 10.3

1. $x^2+4xy+4y^2$; **2.** $9y^2-12y+4$; **3.** $4x^4-4x^2y^2+y^4$; **4.** $81r^2+36rs+4s^2$; **5.** $25y^6+40y^3+16$; **6.** $9m^2+42mn^2+49n^4$; **7.** $a^4+\frac{4}{3}a^2b+\frac{4}{9}b^2$; **8.** $100p^2-60pq+9q^2$; **9.** $\frac{1}{16}m^6+\frac{1}{2}m^3n^2+n^4$; **10.** $\frac{9}{4}z^4-\frac{6}{5}z^2y+\frac{4}{25}y^2$; **11.** $x^2y^4-6xy^2+9$; **12.** $64w^2-112wz+49z^2$; **13.** $9-4x^2$; **14.** $\frac{1}{9}y^2-\frac{1}{4}x^2$; **15.** $\frac{9a^2}{b^2}-\frac{16x^2}{y^2}$; **16.** $16m^2-49n^2$; **17.** $16x^2-25y^4$; **18.** $\frac{1}{9}y^2-\frac{1}{4}x^6$; **19.** $9a^4-25b^6$; **20.** $\frac{9}{4}x^6-y^4$; **21.** $16b^4-9c^8$; **22.** $x^4+5x^2y+6y^2$; **23.** $2y^2-y-10$; **24.** $30x^2+17x-35$; **25.** $\frac{2}{5x^2}+\frac{233}{225x}+\frac{2}{3}$; **26.** $-6y^4-y^2z+2z^2$; **27.** $10x^4+3x^2-18$; **28.** $a^6-4a^3b-12b^4$; **29.** $4x^2+y^2+4-4xy-8x+4y$; **30.** $x^2+4y^2+z^2+4xy-2xz-4yz$; **31.** $a^4+a^2+1-2a^3+2a^2-2a$; **32.** $m^2+4n^2+9-4mn+6m-12n$; **33.** $9y^4+10y^2+1-12y^3-4y$; **34.** $y^4+9y^2+25-6y^3+10y^2-30y$; **35.** $x^2-2xy+y^2-1$; **36.** $a^2+2ab+b^2-9$; **37.** $1-4x^2+4xy-y^2$; **38.** $x^2+2xy+y^2-z^2-2z-1$; **39.** $-4x^2+9y^2$; **40.** $4x^2+12xy+9y^2-12x-18y+8$; **41.** $9z^4-12z^2y^3+4y^6-x^2$; **42.** a^4+3a^2+4; **43.** $x^4+x^2-x^6+4x^3-1$; **44.** $15x^2+15y^2+30xy-16x-16y-15$; **45.** $4y^4+c^4$; **46.** 1002001; **47.** 3721; **48.** 9801; **49.** $\frac{2601}{1024}$; **50.** 140; **51.** 1680; **52.** 96; **53.** 1599; **54.** 899; **55.** 2491; **56.** $\frac{15}{56}$; **57.** 83; **58.** 637

प्रश्नावली 10.4

1. $2x^2(1-2x^2)$; **2.** $x^3(x-3)$; **3.** $-2y(2y^2-1)$; **4.** $x(8x^2+5+3x)$; **5.** $x(x^2+x+3)$; **6.** $(y+2)(4-b)$; **7.** $5x^2(3x^2+2-x)$; **8.** $y(2a+1+b^2)$; **9.** $x^2(7x-5a-x^2)$; **10.** $(1-b)(3a+2c)$; **11.** $(4x-3)(4x+3)$; **12.** $(a+3b)(a-3b)$; **13.** $4(1+3x)(1-3x)$; **14.** $a^2(3+2y)(3-2y)$; **15.** $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$; **16.** $(a^2+9)(a+3)(a-3)$; **17.** $(x^3+6y^2)(x^3-6y^2)$; **18.** $(pqx+2rs)(pqx-2rs)$; **19.** $y^2\left(\frac{1}{3}x+\frac{3}{5}z\right)\left(\frac{1}{3}x-\frac{3}{5}z\right)$; **20.** $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}z\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{4}z\right)$; **21.** $(3x-2y+4z)(3x-2y-4z)$; **22.** $(2x+y+3z)(2x-y-3z)$; **23.** $(4a+3b-c)(4a-3b+c)$; **24.** $(3m+2n)^2$; **25.** $(z+1)^2$; **26.** $(y-5)^2$; **27.** $(2a-1)^2$; **28.** $\frac{1}{4}(x+2)^2$ या $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^2$; **29.** $\left(\frac{1}{5}y-2\right)^2$; **30.** $(a^2-2b^2)^2$; **31.** $(x+2y)^2(x-2y)^2$; **32.** $3(a-3b)^2$; **33.** $2a(y-6)^2$; **34.** $(5a+14b)^2$; **35.** $(m+3n-7)^2$; **36.** $(5x+3y-2)^2$; **37.** $(a^2-4b^2+9)(a^2-4b^2-9)$; **38.** $(7+x-3y)(7-x+3y)$; **39.** $(x+4y+3z)(x+4y-3z)$; **40.** $(2x-2y+3z)(2x+2y-3z)$

विविध प्रश्नावली III
(एकक IX और X पर)

1. (i) $\frac{2}{3}$, 3 (ii) $-\frac{3}{8}$, 2 (iii) 5, 5 (iv) 19, 6 (v) $-\frac{20}{21}$, 1 ; **2.** (i) 4^4 (ii) $\left(\frac{6}{13}\right)^6$ (iii) $(-2.3)^5$ (iv) $(59)^2$ (v) $\left(\frac{3}{13}\right)^1$; **6.** (i) 256 (ii) $\frac{27}{125}$; **7.** (i), (iv), (v) और (vii); **8.** (i) 729 (ii) -216 (iii) 16 (iv) -3 (v) 625 (vi) $\frac{1}{3}$ (vii) 729 (viii) 1 ;

9. (i) x^5 (ii) x^6 (iii) x^0 (iv) x^{17} (v) $4y^6$ (vi) $\frac{81}{25}y^0$ (vii) $15\ x^4$; **10.** 4 ; **11.** 3 ; **12.** 2 ; **13.** 1 ; **14.** 7 ; **15.** (i) $-\frac{5}{6}x^2+x-\frac{5}{4}$ (ii) $6\ x^4-x^2$ (iii) $-21\ y^3+42\ y^5-35\ y^2+56\ y^6$ (iv) $-18\ a^5+24\ a^6-6\ a^4+3\ a^8$; **16.** (i) $15\ y^5-3\ y^6+15y^3+10y^4$ (ii) $-2\ x^4-3x^3+2x^2+5\ x^7-3x+6-x^5$ (iii) $17-4y+15\ y^2+5\ y^3-10\ y^4$ (iv) $5+2\ y-2y^3-24\ y^4$; **17.** (i) 48xy (ii) 10 xy (iii) $12\ z^2\ y^2$ (iv) $49\ y^2$ (v) a^4b^4, c^4d^4 (vi) 3 b, a (vii) 2x, 2 x ; **18.** (i) $9\ y^2-24\ yz+16\ z^2$ (ii) $25\ x^4+60\ x^2\ y^2+36\ y^4$ (iii) $\frac{1}{4}\ m^4\ n^2-m^3\ n+m^2$ (iv) $4x^2-25$ (v) $\frac{1}{25}y^4-z^4$ (vi) $8x^2+14\ x-15$ (vii) $15\ x^4+2\ x^2\ y-y^2$ (viii) $2\ y^6-5x^2\ y^3-3\ x^4$ (ix) $8\ a^4b^4+14\ a^3b^3-15\ a^2b^2$ (x) $4\ x^2+25\ y^2+4-20\ xy-8\ x+20\ y$ (xi) $y^4+11y^2+1-6\ y^3-6\ y$ (xii) $9a^2+16\ b^2+1+24ab-6a-8b$ (xiii) $4a^2-12ab+9b^2-4$ (xiv) $a^2-6ab+9b^2+2a-6b-15$ (xv) $x^4-4x^3+2x^2+4x-3$ (xvi) $4x^2-25y^2+30\ y-9$; **19.** (i) 998001 (ii) 6561 (iii) 1260 (iv) 29600 (v) 20 (vi) 4891 (vii) 1596 ; **20.** 465 ; **21.** 10752 ; **22.** (i) $x(3x+5+8x^2)$ (ii) $5x^2(-x+3x^2+2)$ (iii) $7x^2(x+7)$ (iv) $3(3y+2z)(2-a)$ (v) $5x(2-a)(1-3x)$; **23.** (i) $(4xy+5)(4xy-5)$ (ii) $(5ab+6cd)(5ab-6cd)$ (iii) $\frac{1}{225}(12x+35y)(12x-35y)$ (iv) $\frac{1}{36}(x+4z)(x-4z)$ (v) $5(x+y)(x-5y)$ (vi) $(a^2b^2-9c^2d^2+2mn)(a^2b^2-9c^2d^2-2mn)$; **25.** (i) $(x+2)^2$ (ii) $(2x-5)^2$ (iii) $(3x-7)^2$ (iv) $(x-6)^2$ (v) $2\ (xy+2)^2$ (vi) $(pq-xy)^2$ (vii) $\frac{1}{36}(3x-10)^2$; **26.** (i) $4\ (2x^2+3y^2)^2$ (ii) $(2m+3)^2(2m-3)^2$ (iii) $(2x-5y+3)^2$ (iv) $(2x-3y+2xy)(2x-3y-2xy)$ (v) $(4a+3x-2y)(4a-3x+2y)$ (vi) $(a^2+4b^2)(a+2b)(a-2b)$

प्रश्नावली 11.1

1. (i) $-\frac{35}{9}$ °C (ii) 0 °C (iii) −40 °C (iv) $\frac{20}{9}$ °C (v) $\frac{215}{9}$ °C (vi) 100 °C (vii) 15 °C (viii) $-\frac{160}{9}$ °C ; **2.** (i) $\frac{484}{5}$°F (ii) 14 °F (iii) 86 °F (iv) $\frac{448}{5}$ °F (v) −103°F (vi) $\frac{124}{5}$ °F

प्रश्नावली 11.2

1. 0.6 मी०/घंटा; **2.** 4 घंटे 20 मिनट; **3.** 221 कि० मी०; **4.** (i) 24 कि०मी० (ii) 5 घंटे 15 मिनट (iii) 62 घंटे 30 मिनट (iv) 21.87 मी०/घंटा (v) 300 कि० मी०/घंटा

प्रश्नावली 11.3

1. (क) 128 मीटर (ख) 1164.80 रु०; **2.** (क) 24 घन सें०मी० (ख) 0.25 सें०मी० (ग) 64 घन सें०मी०; **3.** (क) 30 वर्ग सें०मी० (ख) 2611.20 रु० (ग) 18.2 मी०; **4.** (क) 90.25 (ख) 132.25 (ग) 5625 (घ) 600.25; **5.** (क) 210 (ख) 5050; **6.** (क) 301.84 वर्ग मी० (ख) 154 वर्ग सें० मी०; **7.** (क) 44 सें० मी० (ख) 61.6 मी०, 197.12 रु० (ग) 15 चक्कर

पारिभाषिक शब्दावली

अंक	digit
अंकगणित	arithmetic
अंतर	difference
अंतराल	interval
अंश	degree/numerator
अक्षर गुणनखंड	literal factors
अक्षर संख्याएँ	literal numbers
अज्ञात	unknown
अणु	molecule
अद्वितीय	unique
अधोप्रवाह	down stream
अनुपात	ratio
अनुप्रयोग	applications
अभाज्य गुणनखंड	prime factorization
अभिप्रेरण	motivation
अवरोही क्रम	decreasing order
असमान	unequal
असमान पद	unlike terms
असमिका	inequality
असमिका संकेत	inequality symbol
असमीकरण	inequation
असांत आवर्ती	non-terminating repeating या non-terminating recurring

आकृति	figure
आधार	base
आयत	rectangle
आयतन	volume
आरोही-क्रम	increasing order
आसन्न परवर्ती	immediate successor
इकाई का स्थान	units place
उपपत्ति	proof
उपविभाजित	subdivide
उभयनिष्ठ	common
ऊँचाई	height
ऊर्ध्वप्रवाह	upstream
ऋण	minus
ऋणात्मक	negative
एकक/मात्रक	unit
एकक भिन्न	unit fraction
एकपदी	monomial
औसत	average
औसत की विधि	method of average
किनारा	edge
केन्द्र	centre
कोण	angle
कोषाणु	cell
क्रमविनिमेय	commutative
क्रम-सम्बन्ध	ordering
क्वथनांक	boiling point
क्षेत्रफल	area
खगोलज्ञ	astronomer

गणन	counting
गणन संख्याएँ	counting numbers
गणित	mathematics
गुणज	multiple
गुणन	multiplication
गुणनखंड	factor
गुणनखंडन	factorization/factoring
गुणनफल	product
गुणन सारणी	multiplication table
गुणनात्मक प्रतिलोम	multiplicative inverse
गुणांक	coefficient
घन	cube
घनाभ	cuboid
घात	power
घातांक	exponent/index
घातांकीय संकेतन	exponential notation
चर	variable
चाप	arc
चिन्ह	sign/mark
चौड़ाई	breadth/width
जूल	joule
तत्समक अवयव	identity element
तरंगदैर्घ्य	wavelength
तापमान	temperature
तुला	balance
त्रिज्या	radius
त्रिपद	trinomial
त्रिभुज	triangle
दक्षिण पक्ष	right hand side

दशमलव	decimal
दशमलव निरूपण	decimal representation
दहाई का स्थान	tens place
दिशा	direction
द्वादश आधार वाली भिन्न	duodecimal fraction
द्विपद	binomial
धनपूर्णांक	natural number
निम्नतम पद में	in lowest terms
निरपेक्ष मान	absolute value
निरूपण	representation
न्यूनकोण	acute angle
पक्ष	side
पग/चरण	step
पद	term
पद का गुणांक	coefficient of the term
परमाणु	atom
परवर्ती	successor
परिधि	circumference
परिमाप	perimeter
परिमित	finite
परिमेय भिन्न	rational fraction
परिमेय संख्या	rational number
पुनर्व्यवस्थितिकरण गुण	rearrangement property
पूर्णतया गुणनखंडित	completely factored
पूर्ण वर्ग त्रिपद	perfect square trinomial
पूर्ण संख्या	whole number
पूर्णांक	integer
पूर्णांक मान	integer value
प्रतिबन्धित समीकरण	conditional equation

प्रतिरूप	pattern
प्रतिलोम	inverse
प्रतिस्थापन	substitution
प्रसारित संकेतन	expanded notation
बराबर/समान	equal
बहुपद	polynomial
बहुफलक	polyhedron
बार बार योग	repeated addition
बिंदु	point
बीच	between
बीजगणित	algebra
बीजीय व्यंजक	algebriac expression
ब्याज	interest
भागफल	quotient
भार	weight
भिन्न	fraction/distinct
मध्य-बिंदु	mid-point
मापन	measure/measurement
मुख्य विकर्ण	main diagonal
मूल	root/original
योग	addition/sum
योज्य प्रतिलोम	additive inverse
रिक्त	empty/blank
रेखाखंड	line-segment
लम्बाई	length
लम्बी विभाजन विधि	long division method
लाभ	profit
वज्र गुणन	cross multiplication
वर्ग	square

वाम पक्ष	left hand side
वार्षिक	annual
वितरणात्मक	distributive
विपरीत चिन्ह	opposite signs
विभाजन	division
वृत्त	circle
व्यवकलन	subtraction
व्यास	diameter
व्युत्क्रम	reciprocal
शाब्द समस्याएँ या प्रश्न	word problems
शून्य	zero
शून्य का योज्य गुण	addition property of zero
शून्येतर	non-zero
शेष	remainder
संकल्पना	concept
संक्रामिता	transitivity
संक्रिया	operation
संकेतन	notation
संख्यांक	numeral
संख्या रेखा	number line
संख्यात्मक गुणनखंड	~~numerical factor~~
संतुष्ट	satisfy
संयोग	combination
समता संकेत	equality symbol
सममित	symmetrical
समांतर	~~parallel~~
समान चिन्ह	like signs
समान पद	like terms
समिका	equality

समीकरण	equation
समुच्चय	set
समूहन संकेत	grouping symbols
सम्मुख	opposite
सहचारी	associative
सांत	terminating
साधारण ब्याज	simple interest
साहचर्य गुण	associative property
सूत्र	formula
सेक्साजेसीमल	sexagesimal
स्तम्भ	column
स्तम्भानुसार	columnar
स्थानापन्न	transpose
स्थानीय मान	place value
स्थानीय मान का सिद्धांत	place value principle
हर	denominator
हल	solution